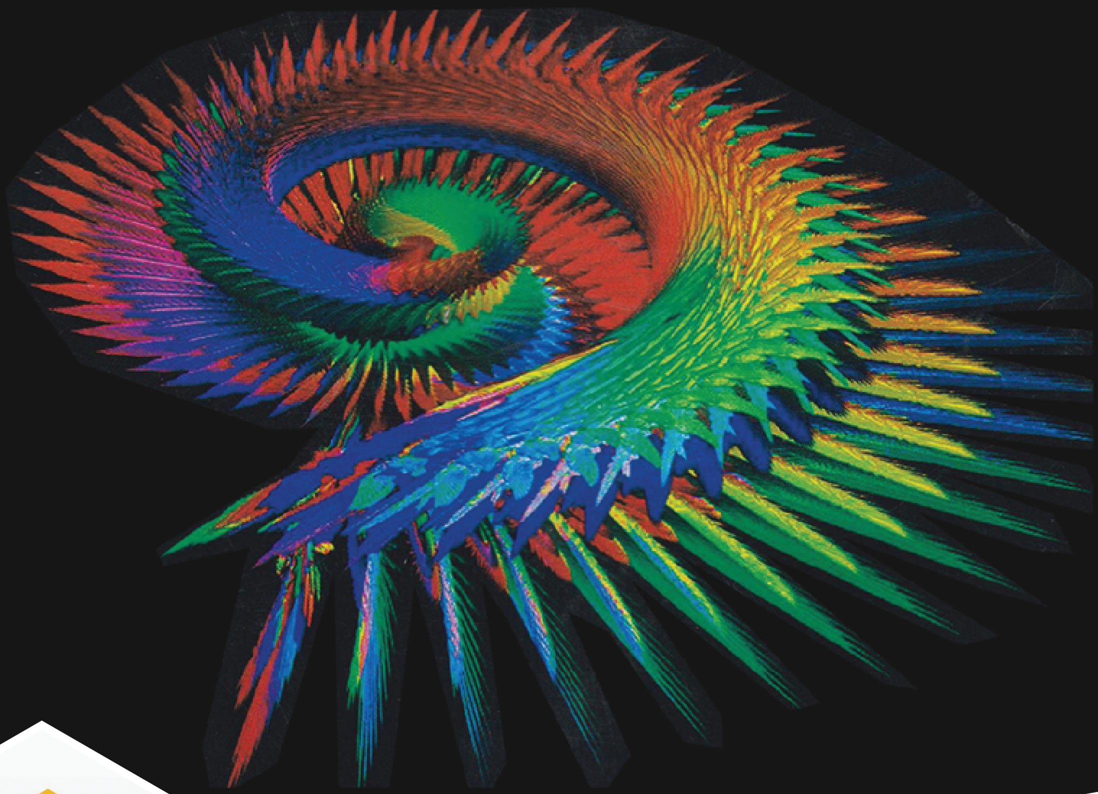
తెలంగాణ రాష్ట్ర విద్యామండలి

ఇంటర్మీడియట్ - ద్వితీయ సంవత్సరం

గణితశాస్త్రం-IIB



ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక

(BASIC LEARNING MATERIAL)

విద్యా సంవత్సరం: **2020-2021**

తెలంగాణ రాష్ట్ర విద్యామండలి

ఇంటర్మీడియట్ ద్వితీయ సంవత్సరం

గణితశాస్త్రం-II B

(తెలుగు మీడియం)

ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక

(BASIC LEARNING MATERIAL)

విద్యా సంవత్సరం

2020-2021

Coordinating Committee

Sri Syed Omer Jaleel, IAS

Commissioner, Intermediate Education &
Secretary, Telangana State Board of Intermediate Education
Hyderabad

Dr. Md. Abdul Khaliq

Controller of Examinations
Telangana State Board of Intermediate Education

Educational Research and Training Wing

Ramana Rao Vudithyala

Reader

Vasundhara Devi Kanjarla

Assistant Professor

Learning Material Contributors

B. Rajasri

J.L. in Maths, Maharshi Veda Vignan Mahavidyalaya Jr. College
Begumpet, Hyderabad.

Dr. S.V. Sailaja

Principal, New Government Jr. College,
YMCA, Secunderabad.

M. Vijaya Sekhar

J.L. in Maths
GJC, BHEL, R.R. Dist.

V. Aruna Kumari

J.L. in Maths
GJC, Toopran, Medak Dist.

ప్రవేశిక

సమస్త ప్రపంచాన్ని అతలాకుతలం చేస్తూ ఉన్న కరోనా మహమ్మారి మన జీవితంలోని ప్రతి రంగాన్ని ప్రభావితం చేసింది. విద్యారంగం కూడా దానికి అతీతమేమీ కాదు. భౌతికంగా తరగతులను పూర్తిగా నిర్వహించడానికి వీలుకాని పరిస్థితుల్లో, తెలంగాణా ప్రభుత్వ ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ దూరదర్శన్ పాఠాల ద్వారా విద్యను మారుమూల ప్రాంతాలకు సైతం అందించింది. నిజానికి భౌతిక తరగతుల నిర్వహణ 1 ఫిబ్రవరి 2021 నుండే సాధ్యమైంది. కరోనా మహమ్మారి వల్ల తలెత్తిన ఈ సంక్షోభ పరిస్థితుల నేపథ్యంలో తెలంగాణ ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ బోధనకూ మరియు రాబోయే 2021 పరీక్షలకూ కేవలం 70% సిలబస్ ను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకోవడం ద్వారా విద్యార్థులపై పాఠ్యప్రణాళికా భారాన్ని తగ్గించింది. విద్యార్థుల సౌకర్యార్థం వార్షిక పరీక్షల ప్రశ్నాపత్రాలలో గణనీయంగా ఛాయిస్‌ను పెంచింది.

విద్యార్థులు పరీక్షల భయాన్ని, ఒత్తిడిని తట్టుకుని ఇంత తక్కువ సమయంలో వార్షిక పరీక్షలకు విజయవంతంగా ఎదుర్కోవడానికి తెలంగాణ రాష్ట్ర ఇంటర్మీడియట్ విద్యా శాఖ "ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక" (Basic Learning Material) ను రూపొందించింది. ఇది విద్యార్థులు పరీక్షలను ధైర్యంగా ఎదుర్కొనే ఒక కరదీపికగా పనిచేస్తుంది. ఇక్కడ గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే ఈ అభ్యసన దీపిక సమగ్రమైనది కాదు. అదెంత మాత్రమూ పాఠ్య పుస్తకానికి ప్రత్యామ్నాయం కాదు. నిజం చెప్పాలంటే ఇది విద్యార్థులు తమ వార్షిక పరీక్షలలో రాయాల్సిన సమాధానాలలోని అత్యావశ్యకమైన సోపానాలను అందించి వాటి ఆధారంగా తమ తమ సమాధానాలను మరింత మెరుగ్గా మార్చుకోవడానికి తోడ్పడుతుంది. మీరు మీ పాఠ్య పుస్తకాలను క్షుణ్ణంగా చదివిన తర్వాత ఈ అభ్యసన దీపికను చదివితే అప్పుడది పాఠ్య పుస్తకాల నుండి, ఉపాధ్యాయుల నుండి మీరు నేర్చుకున్న భావనలను, విషయాలను బలోపేతం చేయడంలో తోడ్పడుతుంది. అతి తక్కువ వ్యవధిలో ఈ అభ్యసన దీపికను మీ ముందుంచడంలో అహర్నిశలూ శ్రమించిన ERTW బృందాన్ని, విషయ నిపుణుల బృందాన్ని మనస్ఫూర్తిగా అభినందిస్తున్నాను.

ఈ అభ్యసన దీపికను మరింత సుసంపన్నం చేయడంలోనూ, ఏ అంశంలోనైనా ఒక్క లోపం కూడా లేకుండా ఈ దీపికను తీర్చిదిద్దడంలోను విద్యావ్యవస్థతో ముడిపడివున్న అందరి నుండీ సూచనలను, సలహాలను కోరుకొంటున్నాను.

ఈ అభ్యసన దీపికల్ని మన వెబ్‌సైట్ www.tsbie.cgg.gov.in ద్వారా పొందవచ్చు.

కమీషనర్ & సెక్రెటరీ

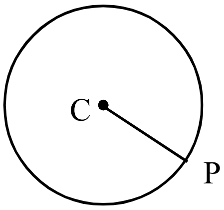
ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ, తెలంగాణ

CONTENTS

యూనిట్ **1**

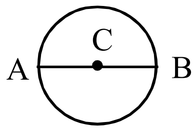
వృత్తం

నిర్వచనము : తలంలోని ఒక బిందువు నుంచి స్థిరదూరంలో అదే తలంలో ఉన్న బిందువుల సమితిని 'వృత్తం' అంటారు.



C = కేంద్రం, CP = వ్యాసార్థం

స్థిర బిందువును కేంద్రం అనీ, కేంద్రం నుండి వృత్త పరిధిపై ఉన్న బిందువు మధ్య గల దూరాన్ని వ్యాసార్థం అని అంటారు.

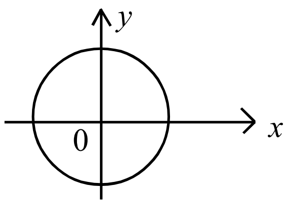


AB = 2CB = (2 × వ్యాసార్థం) ని వ్యాసము అని అంటారు.

(a, b) కేంద్రంగాను, వ్యాసార్థం r గాను ఉన్న వృత్త సమీకరణం $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

కేంద్రం (a, b) మూలబిందవయితే, అనగా $(a, b) = (0, 0)$, అయితే r వ్యాసార్థంగా గల వృత్త సమీకరణం

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



- వృత్త సమీకరణ ప్రామాణిక రూపం లేదా సాధారణ రూపం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. దీని కేంద్రం $(-g, -f)$, వ్యాసార్థం $= r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ లు వ్యాసార్థాలుగా గల వృత్త సమీకరణం

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

- వృత్త పరామితీయ సమీకరణాలు

  $x = x_1 + r\cos\theta$

  $y = y_1 + r\sin\theta$

  ఇక్కడ (x_1, y_1) = కేంద్రం, r = వృత్త వ్యాసార్థం

  θ పరామితి, $0 \le \theta < 2\pi$

గమనిక : వృత్తంపై ఉండే బిందువు (x, y) నిరూపకాలను ఏకచలరాశి (θ) లో పరామితీయ సమీకరణాలలో వ్యక్తం చేస్తాయి. 'θ' ను పరామితి అంటారు.

- కనక, వృత్తం పైనున్న ఏ బిందువునైనా

  $(x, y) = (x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta,)$ = బిందువు 'θ' గా వ్యక్తపరచవచ్చు.

  ఇక్కడ వృత్త కేంద్రం (x_1, y_1), వృత్త వ్యాసార్థం 'r'.

- $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్త పరామితీయ సమీకరణాలు

  $x = -g + r\cos\theta$

  $y = -f + r\sin\theta$ ఇక్కడ $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

  వృత్తంపై ఏదైనా 'బిందువు θ' $= (x, y)$

  $= (-g + r\cos\theta, -f + r\sin\theta)$

- మూలబిందువు కేంద్రంగాను, 'r' వ్యాసార్థంగాను వున్న వృత్త పరామితీయ సమీకరణాలు

  $x = r\cos\theta$

  $y = r\sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi$

- ద్విఘాత సాధారణ సమీకరణం $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తాన్ని సూచించడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమం

  (i) $a = b \ne 0$ (x^2 గుణకం = y^2 గుణకం)

  (ii) $h = 0$ (xy గుణకం శూన్యం)

  (iii) $g^2 + f^2 - ac \ge 0$

సంకేతం

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$

$S_1 = x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$

$S_{11} = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

$S_{12} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c$

$S_{21} = S_{12}$

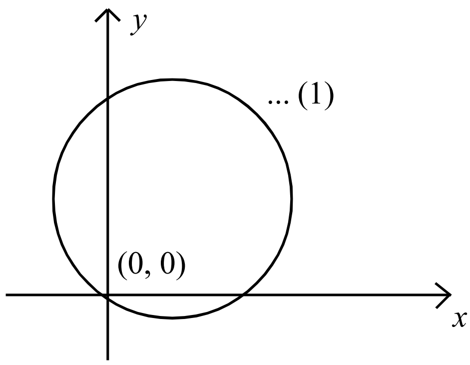
$S_{22} = x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c$

గమనిక: $S_{11} = S/_{(x_1, y_1)} = S_1/_{(x_1, y_1)}$

$S_{12} = S_1/_{(x_2, y_2)} = S_2/_{(x_1, y_1)}$

S = 0 వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

S = 0 అనగా $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$



- వృత్తం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(0, 0) గుండా పోతే, (0, 0) (1) ని తృప్తిపరచాలి.

(0, 0) వృత్తంపై బిందువు కనక,

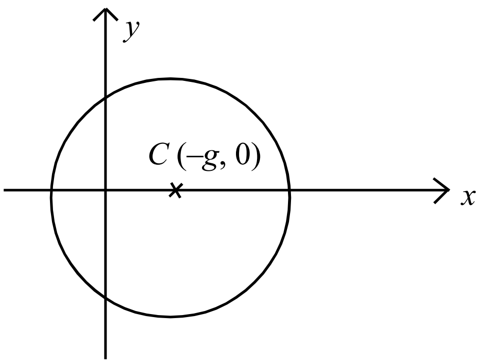
$\Rightarrow$ $0^2 + 0^2 + 2g(0) + 2f(0) + c = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{c = 0}$

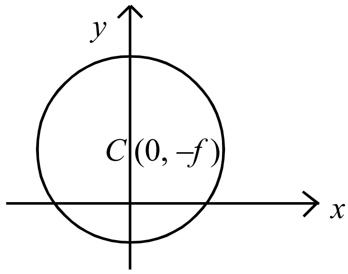
$\therefore$ (0, 0) గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$.

- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్త కేంద్రం x -అక్షంపై వుంటే, $(-g, -f)$, x - అక్షంపై వుంటుంది.

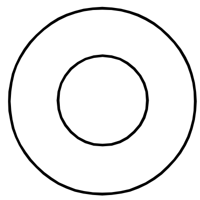
$\Rightarrow$ $\boxed{f = 0}$. ఎందుకంటే x - అక్షంపై ఏదైనా బిందువు యొక్క y-నిరూపకం సున్న.



- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తకేంద్రం y-అక్షంపై వుంటే, అనగా $(-g, -f)$, y-అక్షంపై వుంటే $\boxed{g = 0}$ అవుతుంది. ఎందుకంటే y-అక్షంపై ఏదైనా బిందువు యొక్క x-నిరూపకం సున్న.

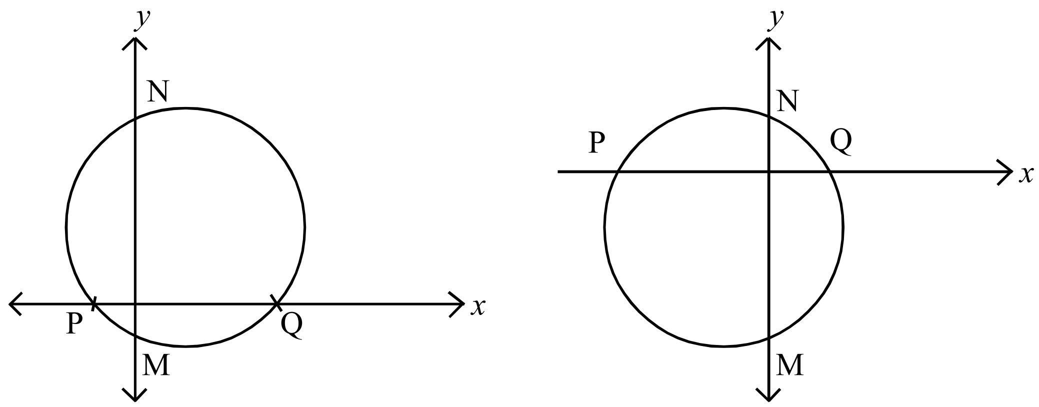


- రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ వృత్త కేంద్రాలు ఒకటే అయితే వాటిని ఏకకేంద్ర వృత్తాలు అని అంటారు.

  గమనిక: $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తంతో ఏక కేంద్రంగా వుండే వృత్త సమీకరణం $x^2+y^2+2gx+2fy+c^1=0$ రూపంలో వుంటుంది. c^1 స్థిరరాశి. వృత్తాల కేంద్రం ఒక్కటే.

- వృత్త వ్యాసార్థం 1 గా వుండే వృత్తాన్ని యూనిట్ వృత్తమంటాం.
- ఏదైనా వృత్తం x-అక్షాన్ని 'P', 'Q' బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే PQ దూరాన్ని వృత్తం x-అక్షంపై చేసే అంతరఖండం లేదా x-అంతరఖండం అని అంటారు.
- ఏదైనా వృత్తం y-అక్షాన్ని 'M', 'N' బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే MN దూరాన్ని వృత్తం y-అక్షంపై చేసే అంతరఖండం లేదా y-అంతరఖండం అని అంటారు.



PQ = x-అంతరఖండం, MN = y-అంతరఖండం

- $(g^2-c)>0$ అయితే $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తం x-అక్షంపై చేసే అంతరఖండం $2\sqrt{g^2-c}$.

  $\therefore$ PQ $=2\sqrt{g^2-c}$.

  x-అంతరఖండం = జ్యా PQ పొడవు = PQ దూరం $=2\sqrt{g^2-c}$.

- $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తం x-అక్షాన్ని స్పృశిస్తే, P, Q బిందువులు ఏకీభవిస్తాయి. అనగా, జ్యా PQ పొడవు సున్న లేదా x-అంతరఖండం సున్న.

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{g^2-c}=0 \quad \Rightarrow \quad g^2-c=0$

$\therefore$ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తం x-అక్షాన్ని స్పృశించడానికి నియమం $g^2-c=0$ or $g^2=c$.

- $(f^2-c)>0$ అయితే $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తం y-అక్షంపై చేసే అంతరఖండం $=2\sqrt{f^2-c}$

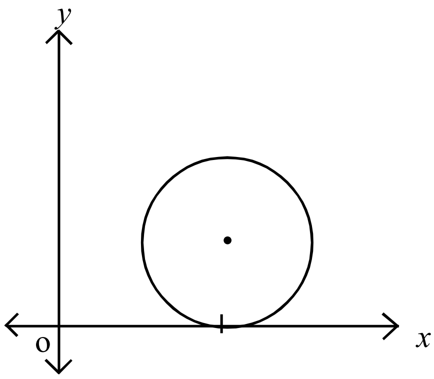
$MN = 2\sqrt{f^2 - c}$

y-అంతరఖండం $= 2\sqrt{f^2 - c}$

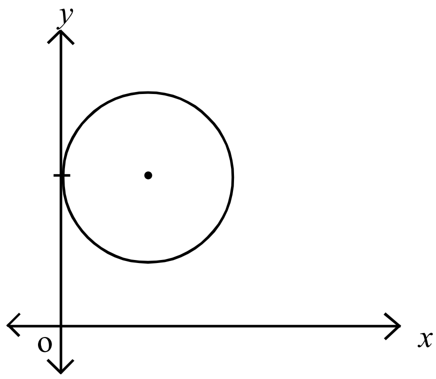
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం y-అక్షాన్ని స్పృశిస్తే, బిందువులు M, N లు ఏకీభవిస్తాయి. అనగా జ్యా MN పొడవు సున్న లేదా

y-అంతరఖండం సున్న $\Rightarrow \quad 2\sqrt{f^2 - c} \Rightarrow f^2 - c = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం y-అక్షాన్ని స్పృశించడానికి నియమం $f^2 - c = 0$ లేదా $f^2 = c$.



వృత్తం x-అక్షాన్ని స్పృశిస్తుంది $\Rightarrow g^2 = c$



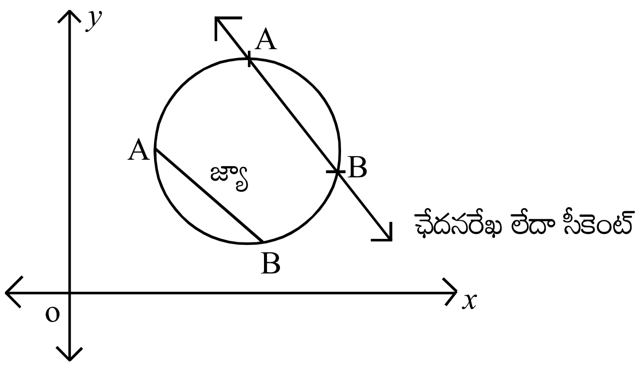
వృత్తం y-అక్షాన్ని స్పృశిస్తుంది $\Rightarrow f^2 = c$

నిర్వచనము:

వృత్తంపై A, B లు రెండు విభిన్న బిందువులు అయితే

(i) A, B ల గుండా పోయే రేఖ, $\overleftrightarrow{AB}$ ని ఛేదనరేఖ లేదా సీకెంట్ అంటారు.

(ii) A, B బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం $\overline{AB}$ A , B ని జ్యా అంటాం. దీని పొడవును $\overline{AB}$ తో సూచిస్తాము.



సంకేతం

P (x_1, y_1) అనుకొనుము.

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అయితే, అపుడు

$S_1 = x\,x_1 + y\,y_1 + g(x + x_1) + f\,(y + y_1) + c$

ఉదా: $S = x^2 + y^2 + 3x - 5y + 9$, $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ అయితే, అపుడు

$$S_1 = x(-2) + y(3) + \frac{3}{2}(x-2) - \frac{5}{2}(y+3) + 9 \qquad 2g = 3$$

$$= -2x + 3y + \frac{3x-6}{2} - \frac{(5y+15)}{2} + 9 \qquad 2f = -5$$

$$= \frac{-4x + 6y + 3x - 6 - 5y - 15 + 18}{2}$$

$$= \frac{-x + y - 3}{2}$$

$S_{11} = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

∴ (x_1, y_1) వద్ద 'S' విలువ, పై వృత్తానికి S_{11}

∴ $S_{11} = (-2)^2 + 3^2 + 3(-2) - 5(3) + 9$

$= 4 + 9 - 6 - 15 + 9 = 1$

S_1, x, y లతో మొదటి తరగతి సమాసము.

S_{11} ఒక వాస్తవ సంఖ్య.

- **ముఖ్య గమనిక:** S_1 లేదా S_{11} ని వ్రాసేటప్పుడు మొదటగా $S = 0$ ను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాసుకోండి. ఉదాహరణకి, వృత్త సమీకరణం $3x^2 + 3y^2 + 4x + 5y + 7 = 0$ అనుకోండి. అప్పుడు

$$S = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y + \frac{7}{3}.$$

$$S_1 = xx_1 + yy_1 + \frac{2}{3}(x + x_1) + \frac{5}{6}(y + y_1) + \frac{7}{3}$$

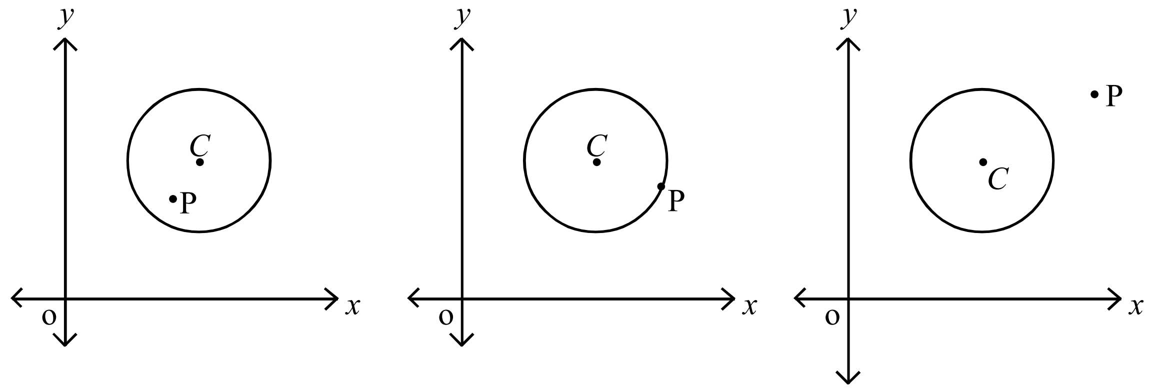
- **వృత్తం దృష్ట్యా బిందువు స్థితి**

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం, తలంలో ఏదైనా ఒక వృత్తం అనుకొనుము. అదే తలంలో $P(x_1, y_1)$ ఏదైనా ఒక బిందువు. అప్పుడు

(i) $P(x_1, y_1)$ వృత్త అంతర్భాగంలోని బిందువు $\Leftrightarrow (S_{11} < 0)$.

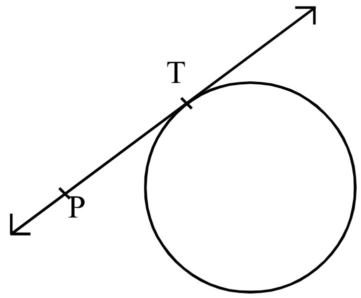
(ii) $P(x_1, y_1)$ వృత్త పరిధిపై వుంటుంది $\Leftrightarrow (S_{11} = 0)$.

(iii) $P(x_1, y_1)$ వృత్తానికి బాహ్య భాగంలోని బిందువు $\Leftrightarrow (S_{11} > 0)$.



P వృత్త అంతర్భాగ బిందువు $\Leftrightarrow S_{11}<0$ P వృత్తపరిధిపై బిందువు $\Leftrightarrow S_{11}=0$ వృత్తానికి బాహ్యభాగంలోని బిందువు $\Leftrightarrow S_{11}>0$

- **$P(x_1, y_1)$ నుండి వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు**



వృత్తం దృష్ట్యా స్పర్శరేఖ, వృత్తాన్ని ఏదైనా బిందువు వద్ద స్పృశించే సరళరేఖ.

పై పటంలో, $\overleftrightarrow{PT}$ వృత్తాన్ని T వద్ద స్పృశించే స్పర్శరేఖ. T ని వృత్తానికి స్పర్శరేఖ $\overleftrightarrow{PT}$ యొక్క స్పర్శబిందువు అని అంటారు.

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$ వృత్తానికి P బాహ్య బిందువు అయితే, $P(x_1, y_1)$ నుంచి PT వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అయితే, అపుడు PT దూరాన్ని, P నుంచి $S = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు అని అంటారు.

స్పర్శరేఖ పొడవు కనుక్కోవాలంటే సూత్రం $\sqrt{S_{11}}$.

$\therefore$ PT = P నుంచి $S = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు $= \sqrt{S_{11}}$.

నిర్వచనము

'C' కేంద్రంగా, 'r' వ్యాసార్థంగా గల వృత్తం $S = 0$ అయి, వృత్త తలంలో $P(x_1, y_1)$ ఏదైనా బిందువు అయితే $CP^2 - r^2$ను, వృత్తం $S = 0$ దృష్ట్యా P యొక్క బిందుశక్తి అని అంటాం.

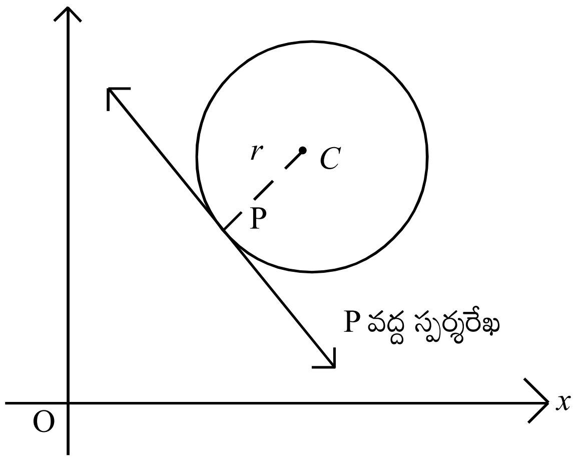
- $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ బిందు శక్తి S_{11}.
- **జ్యా, స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖ** $\longrightarrow$ వివిధ రూపాలలో సమీకరణాలు

జ్యా

- $S = 0$ వృత్తంపై $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ లు రెండు బిందువులు అయితే, ఛేదన రేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ లేదా జ్యా $\overline{AB}$ సమీకరణం $S_1 + S_2 = S_{12}$
- $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ వ్యాసార్థంగా గల వృత్తం $S = 0$ పై ఏవేని రెండు బిందువులు $\theta_1 = (-g + r\cos\theta_1, -f + r\sin\theta_1)$, $\theta_2 = (-g + r\cos\theta_2, -f + r\sin\theta_2)$ లు అయితే, ఈ రెండు బిందువులను కలిపే జ్యా సమీకరణం

$$(x+g)\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)+(y+f)\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=r\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

- ఒకే సరళరేఖ వృత్తాన్ని ఒకే ఒక బిందువు 'P' వద్ద స్పృశిస్తే ఆ రేఖను 'P' వద్ద వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అంటారు.



- $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సూచించే వృత్తంపై వున్న బిందువు (x_1, y_1) వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణం

  (i) $S_1 = 0$ లేదా $x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

  (ii) $y + f = m(x + g) \pm r\sqrt{1 + m^2}$ వాలు రూపంలో

  $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ = వ్యాసార్ధము, m = స్పర్శరేఖ వాలు

  (iii) $(x + g)\cos\theta + (y + f)\sin\theta = r$, పరామితీయ రూపంలో

  r = వ్యాసార్ధము = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

  వృత్తంపై బిందువు $\theta = (-g + r\cos\theta, -f + r\sin\theta) = (x_1, y_1)$, θ పరామితి

- $S = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

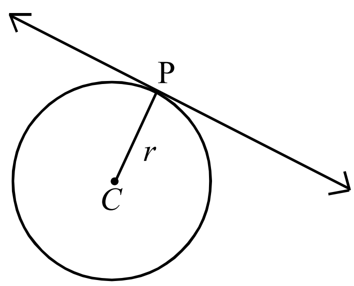
  (i) $S_1 = 0$ లేదా $x x_1 + y y_1 - r^2 = 0$, ఇక్కడ $P(x_1, y_1)$ వృత్తంపై బిందువు

  (ii) $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$ వాలు రూపంలో m = స్పర్శరేఖ వాలు

  (iii) $x\cos\theta + y\sin\theta = r$ పరామితీయ రూపంలో వృత్తంపై బిందువు 'θ' = $(r\cos\theta, r\sin\theta)$,

  θ పరామితి. $0 \le \theta \le 2\pi$.

స్పర్శ నియమం



$L = lx + my + n = 0$ సరళరేఖ

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తాన్ని స్పృశించడానికి నియమం

వృత్త వ్యాసార్థం = వృత్త కేంద్రం C నుండి $L = 0$ రేఖకు గల లంబదూరం

$$\Rightarrow \quad \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \frac{|l(-g) + m(-f) + n|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$ (ఇది కావలసిన నియమం)

అభిలంబరేఖ

వృత్తం మీద ఉన్న బిందువు P దగ్గర ఏర్పడే స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉంటూ P గుండా పోయే సరళరేఖను వృత్తానికి P వద్ద అభిలంబరేఖ అంటారు.

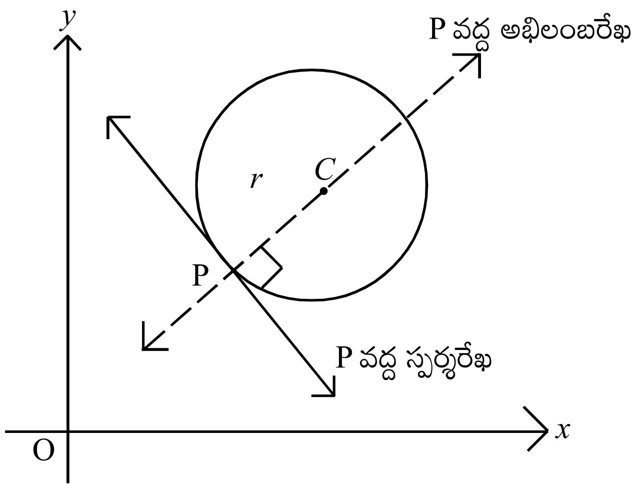
వృత్త కేంద్రం C నుండి P బిందువు P గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం, P వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం.

- $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం మీద ఉండే బిందువు $P(x_1, y_1)$ వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం, వృత్తకేంద్రం C, P ల గుండా పోయే రేఖ సమీకరణం

  కేంద్రం $= (-g, -f) = C$, $P(x_1, y_1)$

  CP గుండా పోయే రేఖ సమీకరణం = అభిలంబరేఖ సమీకరణం

  i.e. $y - y_1 = \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}\left(x - x_1\right)$ (రెండు బిందువుల రూపం)



- జ్యా AB పొడవు $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

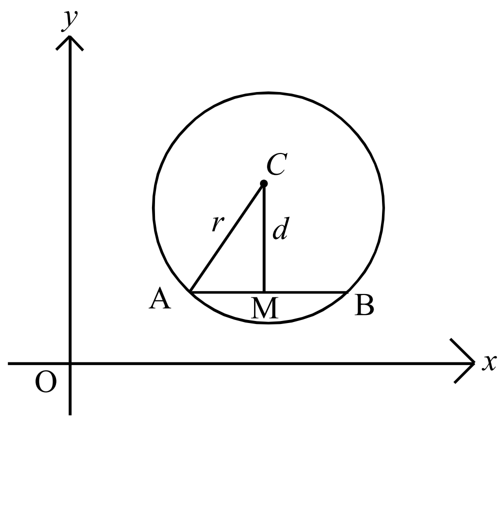
  'r' = వృత్త వ్యాసార్థం, కేంద్రం c నుండి జ్యా AB కు గీసిన లంబదూరం 'd'

  Δ ACM లో $r^2 = d^2 + (AM)^2$

$\Rightarrow$ $(AM)^2 = r^2 - d^2$

$\Rightarrow$ $\overline{AM} = \sqrt{r^2 - d^2}$

జ్యా పొడవు $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{r^2 - d^2}$

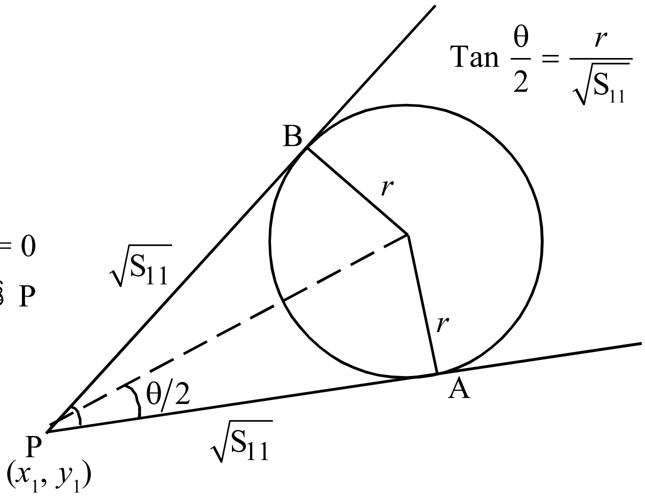


స్పర్శ జ్యా, ధృవం, ధృవరేఖ

PB = PA = P నుండి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు

$= \sqrt{S_{11}}$

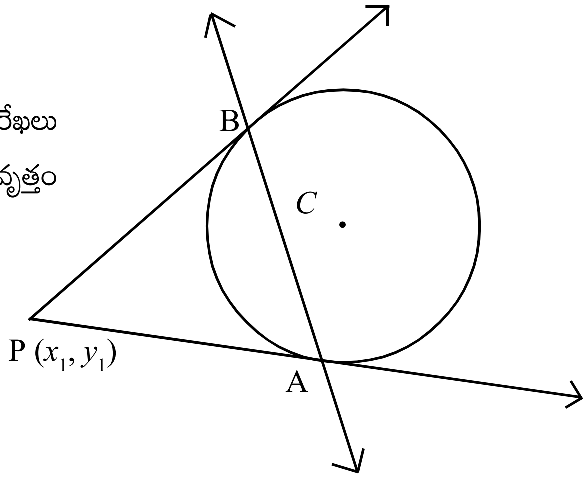
$P(x_1, y_1)$, $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తానికి బాహ్య భాగంలోని బిందువు అయితే P నుంచి వృత్తానికి రెండు స్పర్శరేఖలు వ్యవస్థితం.



- బాహ్య బిందువు $P(x_1\ y_1)$ నుంచి S = 0 వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం θ అయితే

$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$, ఇక్కడ r వృత్త వ్యాసార్థం

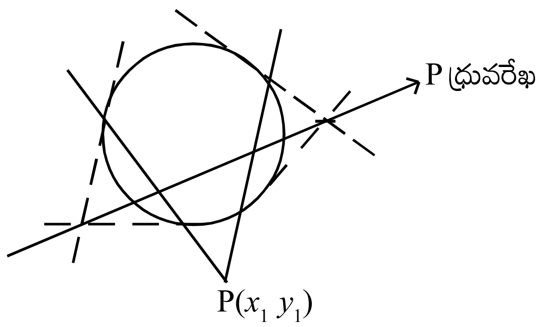
- S = 0 వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ నుంచి S = 0 కి గీసిన స్పర్శరేఖలు వృత్తాన్ని A, B ల వద్ద స్పృశిస్తే $\overleftrightarrow{AB}$ ని S = 0 వృత్తం దృష్ట్యా P స్పర్శ జ్యా అంటారు.
- $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ బాహ్య బిందువు అయితే S = 0 వృత్తం దృష్ట్యా P స్పర్శ జ్యా సమీకరణం $S_1 = 0$ అనగా $x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$



P స్పర్శ జ్యా ($S_1 = 0$ సమీకరణం)

- **ధ్రువ, ధ్రువరేఖ → నిర్వచనం, సమీకరణాలు**
- S = 0 ఒక వృత్తం అనుకొనుము. అదే తలంలో P ఒక బిందువు (కేంద్రం కానిది). P గుండా పోయే జ్యా కొనల వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖల ఖండన బిందువుల బిందుపథాన్ని వృత్తం దృష్ట్యా P ధ్రువరేఖ అంటారు.

P ను ధ్రువరేఖ యొక్క ధ్రువం అంటారు.



- $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ ధ్రువరేఖ $S_1 = 0$

  $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తం దృష్ట్యా $lx + my + n = 0, (n \neq 0)$ సరళరేఖ ధ్రువం $= \left(\dfrac{-a^2 l}{n}, \dfrac{-a^2 m}{n}\right)$

- $lg + mf - n \neq 0$ అయితే $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $lx + my + n = 0$ సరళరేఖ ధ్రువం

  $\left(-g + \dfrac{lr^2}{\lg + mf - n}, -f + \dfrac{mr^2}{lg + mf - n}\right)$, ఇక్కడ $r =$ వ్యాసార్ధం

- $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ కి ధ్రువరేఖ $Q(x_2, y_2)$ గుండా పోతుంది. $\Leftrightarrow$ $Q(x_2, y_2)$ ధ్రువరేఖ $P(x_1, y_1)$ గుండా పోతుంది.

- $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P ధ్రువరేఖ Q గుండా పోతే P, Q బిందువులను సంయుగ్మ బిందువులు అంటారు. (Q ధ్రువరేఖ P గుండా పోతుంది)

- $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ లు సంయుగ్మ బిందువులు కావడానికి నియమం $S_{12} = 0$.

  అనగా $x_1 x_2 + y_1 y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0$

- $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P, Q లు సంయుగ్మ బిందువులైతే P, Q ల ధ్రువరేఖలకు $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా సంయుగ్మ రేఖలని అంటారు.

  (లేదా)

  $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా రెండు సరళరేఖలు, సంయుగ్మ రేఖలయితే ఒకదాని ధ్రువం మరొక దాని ధ్రువరేఖపై ఉంటుంది.

- $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తం దృష్ట్యా $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ సరళరేఖలు సంయుగ్మాలు కావడానికి నియమం $a^2(l_1 l_2 + m_1 m_2) = n_1 n_2$

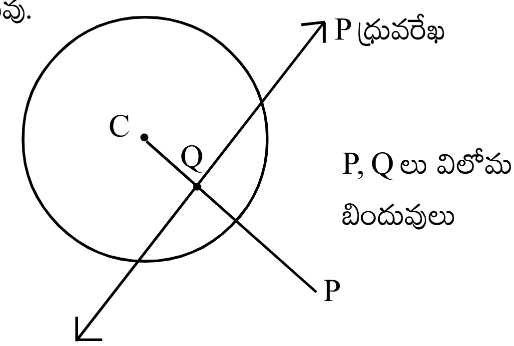
- $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ రేఖలు సంయుగ్మ రేఖలు కావడానికి నియమం

  $r^2(l_1 l_2 + m_1 m_2) = (l_1g + m_1f - n_1) \times (l_2g + m_2f - n_2)$, ఇక్కడ $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

- $S = 0$ వృత్త కేంద్రం C, వ్యాసార్ధం 'r'. C, P, Q లు సరేఖీయాలు అయ్యేటట్లు c కి ఒకే వైపు ఉన్న బిందువులు P, Q లు అయి $(CP) \times (CQ) = r^2$ అయితే $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P, Q లను విలోమ బిందువులు అని అంటారు.

సిద్ధాంతం:

S = 0 వృత్త కేంద్రం 'C', వ్యాసార్థం 'r' అయితే P, Q లు విలోమ బిందువులు $\Leftrightarrow$ Q బిందువు, S = 0 వృత్తం దృష్ట్యా P ధ్రువరేఖ, C, P లను కలిపే రేఖల ఖండన బిందువు.



- S = 0 వృత్తం దృష్ట్యా P విలోమ బిందువు, కేంద్రం నుంచి P ధ్రువరేఖపై గీసిన లంబపాదం అవుతుంది.

సమస్య

1. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా బిందువు $(-2, 3)$ విలోమ బిందువు కనుక్కోండి.

Sol : దత్త వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ సమీకరణాన్ని ... (1)

ప్రామాణిక రూపంతో పోల్చగా

$2g = -4 \quad \Rightarrow \quad g = -2$

$2f = -6 \quad \Rightarrow \quad f = -3$

$c = 9$

$\therefore$ కేంద్రం $= (-g, -f) = (2, 3) = C$

$P = (-2, 3)$ అనుకొనుము.

CP సమీకరణం $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$\Rightarrow \quad y - 3 = \dfrac{3-3}{-2-2}(x-2)$

$\Rightarrow \quad y - 3 = 0$ ... (2)

P ధృవరేఖ $S_1 = 0$, ఇక్కడ $P(x_1, y_1) = (-2, 3)$

$\Rightarrow \quad x x_1 + y y_1 + 2(x + x_1) - 3(y + y_1) + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x(-2) + y(3) - 2(x - 2) - 3(y + 3) + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad -2x + 3y - 2x + 4 - 3y - 9 + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad -4x + 4 = 0$

$\Rightarrow \quad 4(-x + 1) = 0$

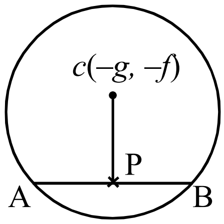
$\Rightarrow \quad -x + 1 = 0$ ... (3)

(2), (3) లను సాధించగా

$x = 1, y = 3$

$\therefore$ P విలోమ బిందువు Q = (1, 3)

- S = 0 వృత్తపు జ్యా $\overline{AB}$ (వ్యాసం కానిది) మధ్య బిందువు $P(x_1, y_1)$ అయితే జ్యా $\overleftrightarrow{AB}$ సమీకరణం $S_1 = S_{11}$



AB జ్యా మధ్య బిందువు $P(x_1, y_1)$

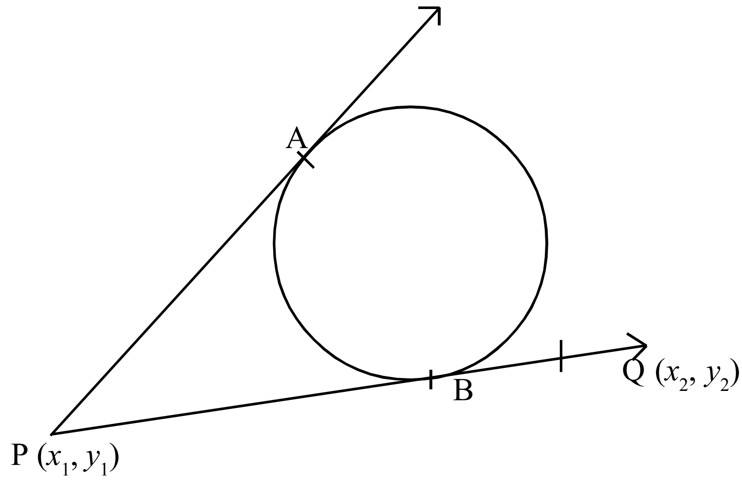
$\overleftrightarrow{AB}$ సమీకరణం $S_1 = S_{11}$

అనగా $x\,x_1 + y\,y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$

- చాలా ముఖ్యమైనది (ఉత్పన్నాన్ని నేర్చుకోండి)

S = 0 వృత్తానికి బాహ్యబిందువు $P(x_1, y_1)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖల సంయుక్త సమీకరణం $S_1^2 = S.S_{11}$ అని చూపండి.

Sol :



S = 0 వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖలు వృత్తాన్ని A, B ల వద్ద స్పృశిస్తున్నాయనుకొందాం. అప్పుడు

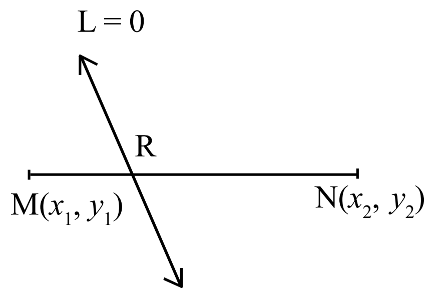
$\overleftrightarrow{AB}$, P యొక్క స్పర్శ జ్యా. దాని సమీకరణం, $S_1 = 0$, అంటే

$x\,x_1 + y\,y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

ఈ స్పర్శరేఖలపై $Q(x_2, y_2)$ ఏదైనా బిందువు అనుకొందాం.

Q బిందుపథం, P నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖల సంయుక్త సమీకరణం.

$\overleftrightarrow{PQ}$ రేఖాఖండాన్ని, సరళరేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ (దీని సమీకరణం $S_1 = 0$) ఖండించే నిష్పత్తి $-\frac{S_{11}}{S_{12}}$



$\overline{MN}$ ను R విభజించే నిష్పత్తి $-\frac{L_{11}}{L_{22}}$

$\Rightarrow \quad \frac{PB}{BQ} = \frac{-S_{11}}{S_{12}}$ (అని తెలుసు) ... (1)

కాని $PB = \sqrt{S_{11}}$ = P నుండి స్పర్శరేఖ పొడవు

$BQ = \sqrt{S_{22}}$ = Q నుండి స్పర్శరేఖ పొడవు

$\therefore \quad \frac{PB}{BQ} = \frac{\sqrt{S_{11}}}{\sqrt{S_{22}}}$ ... (2)

(1), (2) ల నుండి $\frac{\sqrt{S_{11}}}{\sqrt{S_{22}}} = -\frac{S_{11}}{S_{12}}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా, $\frac{S_{11}}{S_{22}} = \frac{S_{11}^{\,2}}{S_{12}^{\,2}} \Rightarrow \frac{1}{S_{22}} = \frac{S_{11}}{S_{12}^{\,2}}$

$\Rightarrow \quad S_{12}^{\,2} = S_{11} \cdot S_{22}$

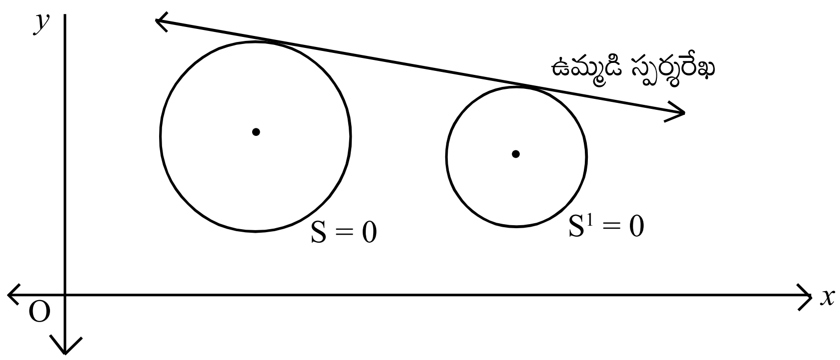
$\therefore \quad Q(x_2, y_2)$ బిందుపథం $S_1^{\,2} = S_{11} \cdot S$

$\Rightarrow \quad S_1^{\,2} = S \cdot S_{11}$ ఈ సమీకరణం $S = 0$ వృత్తానికి బాహ్యబిందువు $P(x_1, y_1)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖల సంయుక్త సమీకరణం.

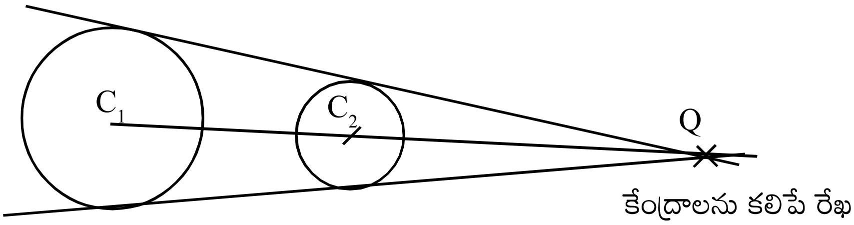
కనక, నిరూపించడమైనది.

ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు

- L అనే సరళరేఖ $S = 0, S^1 = 0$ వృత్తాల రెండింటికీ స్పర్శరేఖ అయితే L ను $S = 0, S^1 = 0$ వృత్తాలకు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అంటారు.

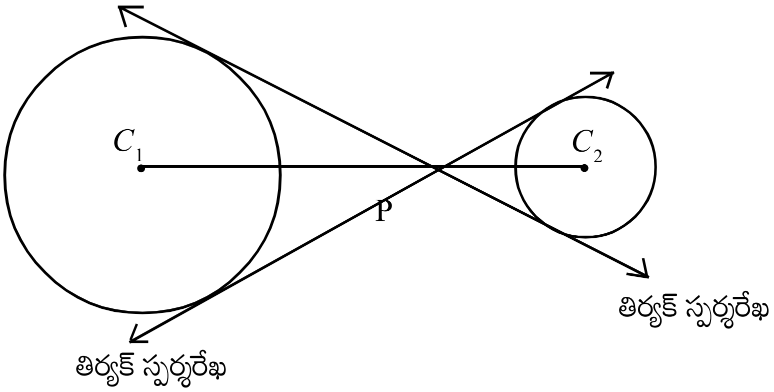


- రెండు వృత్తాల ఏ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలయినా ఖండించుకుంటే, ఆ స్పర్శరేఖలు వృత్త కేంద్రాలను కలిపే రేఖ అనుషక్తాలు.

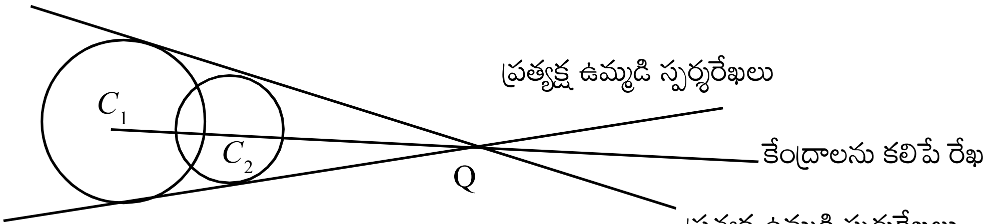


రెండు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కేంద్రాలను కలిపే రేఖ Q వద్ద ఖండించుకుంటాయి. (Q వద్ద అనుషక్తాలు.)

- రెండు వృత్తాల, రెండు స్పర్శరేఖల (వ్యవస్థితమయితే) ఖండనబిందువు Q, వృత్త కేంద్రాలు C_1, C_2 లు సరేఖీయాలు. C_1, C_2, Q లు సరేఖీయాలు, అంటే, C_1, C_2, Q లు ఒకే రేఖపై ఉంటాయి.
- $S = 0$, $S^1 = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల జత $\overline{C_1C_2}$ రేఖాఖండాన్ని (C_1, C_2 లు వృత్తకేంద్రాలు) ఖండిస్తే ఈ స్పర్శరేఖలను తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు అని అంటారు.



- $S = 0$, $S^1 = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల జత పొడిగించిన $\overline{C_1C_2}$ రేఖపై ఖండించుకుంటే ఈ స్పర్శరేఖలను ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు అని అంటారు.



రెండు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కేంద్రాలను కలిపే రేఖ Q వద్ద ఖండించుకుంటాయి. (Q వద్ద అనుషక్తాలు.)

- తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల ఖండన బిందువు P ను సరూప అంతరకేంద్రం అని అంటారు.

- సరూప అంతరకేంద్రం P, $\overline{C_1C_2}$ రేఖని $r_1 : r_2$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది. (r_1, C_1 కేంద్రంగా గల వృత్త వ్యాసార్థం r_2 , C_2కేంద్రంగా గల వృత్త వ్యాసార్థం)
- ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల ఖండన బిందువు Q ని సరూప బాహ్యకేంద్రం అని అంటారు.
- Q బిందువు, $\overline{C_1C_2}$ రేఖను $r_1 : r_2$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజిస్తుంది.
- P, Q, C_1, C_2 లు సరేఖీయాలు. ఇక్కడ,

  P = సరూప అంతర కేంద్రం.

  Q = సరూప బాహ్య కేంద్రం.

  C_1, C_2 లు వృత్త కేంద్రాలు.

రెండు వృత్తాల సాపేక్ష స్థితులు (Relative positions of two circles)

S = 0 S^1 = 0 వృత్తాల కేంద్రాలు, వ్యాసార్థాలు వరసగా C_1, C_2, r_1, r_2 లు అనుకొనుము.

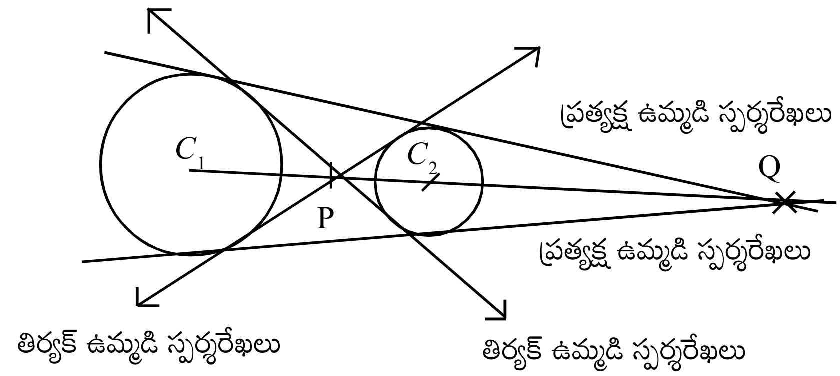
C_1, C_2 లను కలిపే రేఖను $\overline{C_1C_2}$ అనుకొనుము. రెండు వృత్తాల సాపేక్ష స్థితులు క్రింది సందర్భాలలో తెలిపినట్లు ఉంటాయి.

సందర్భం (i)

ఒక వృత్తం మరొక వృత్తానికి బాహ్యంగా ఉంటుంది.

నియమం: $\overline{C_1C_2} > r_1 + r_2, (r_1 \neq r_2)$

ఈ సందర్భంలో రెండు వృత్తాలు ఖండించుకొనవు.

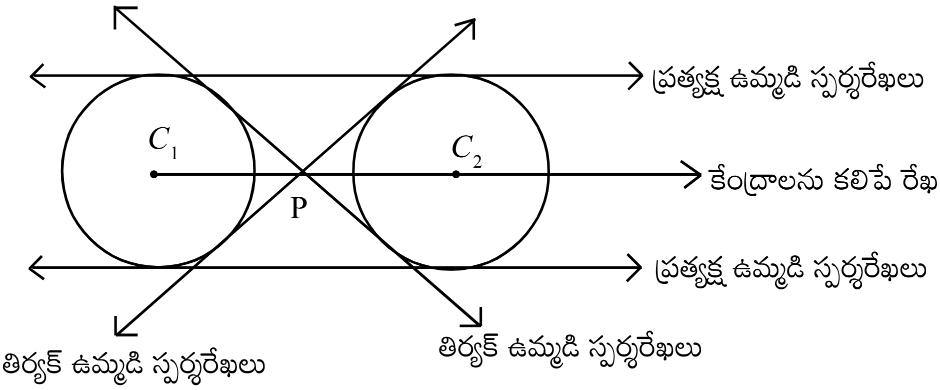


రెండు ఖండించుకోని వృత్తాలకు, మనం రెండు ప్రత్యక్ష, రెండు తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు. కనక, మొత్తం నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు.

ఇంకా సరూప అంతరకేంద్రం P, సరూప బాహ్య కేంద్రం Q.

సందర్భం (ii)

నియమం : $\overline{C_1C_2} > r_1 + r_2, r_1 = r_2$



వృత్తాలు ఖండించుకొనవు.

సరూప అంతరకేంద్రం P వద్ద తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఖండించుకుంటాయి.

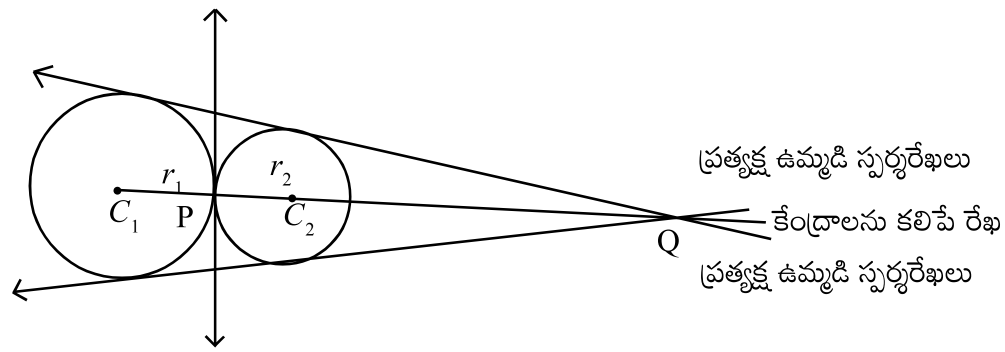
ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు $\overline{C_1C_2}$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

Q, సరూప బాహ్యకేంద్రం, వ్యవస్థితం కాదు.

కనక, మనం నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు.

సందర్భం (iii)

నియమం : $\overline{C_1C_2} = r_1 + r_2$



రెండు వృత్తాలు ఒకదానికొకటి బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి.

రెండు దత్త వృత్తాల స్పర్శబిందువు 'P', సరూప అంతరకేంద్రం.

'P' ఒకే తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ ఉంటుంది.

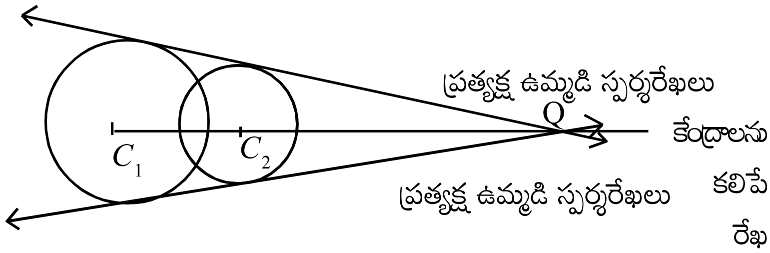
ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల ఖండన బిందువు Q, సరూప బాహ్యకేంద్రం.

కనక, ఈ సందర్భంలో మూడు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు.

సందర్భం (iv)

నియమం : $|r_1 - r_2| < \overline{C_1C_2} < r_1 + r_2$

ఈ సందర్భంలో మనం రెండు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు.

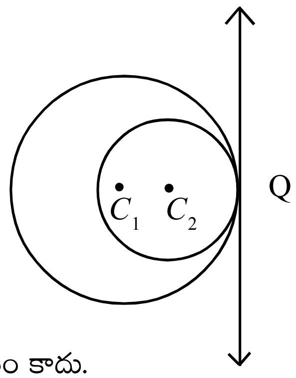


ఈ సందర్భంలో రెండు వృత్తాలు Q వద్ద ఒకదానికొకటి ఖండించుకుంటాయి.
తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయలేము.
అందువల్ల సరూప అంతరకేంద్రం వ్యవస్థితం కాదు.
ఈ సందర్భంలో మనం రెండు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు.

సందర్భం (V)

నియమం : $\overline{C_1C_2} = |r_1 - r_2|$

ఈ సందర్భంలో, రెండు వృత్తాలు ఒకదానికొకటి అంతరంగా స్పృశించుకుంటాయి.

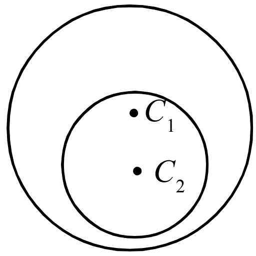


తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయలేము. అంటే, సరూప అంతరకేంద్రం వ్యవస్థితం కాదు.
రెండు వృత్తాల స్పర్శబిందువు Q వద్ద ఒకే ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ గీయవచ్చు.
ఈ సందర్భంలో ఒకే ఉమ్మడి స్పర్శరేఖను గీయవచ్చు.

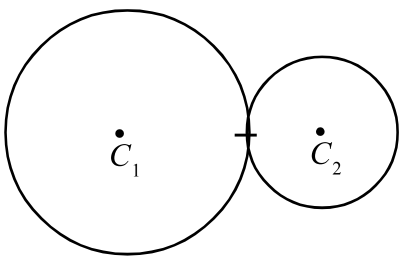
సందర్భం (VI)

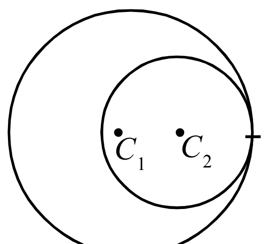
నియమం : $\overline{C_1C_2} < |r_1 - r_2|$

ఈ సందర్భంలో ఒక వృత్తం, మరొక వృత్తంలో అంతరంగా వుంటుంది.
ఈ వృత్తాలకు గీయగలిగిన ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సంఖ్య సున్న.
ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సంఖ్య = 0.



గమనిక: రెండు వృత్తాలకు ఒకే ఉమ్మడి బిందువు వుంటే, ఆ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకుంటాయని అంటారు.



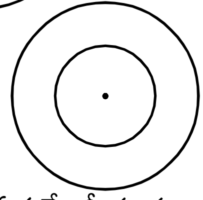


Case : (VII)

$\Rightarrow$ $C_1C_2 = 0$ అయితే, రెండు వృత్తాల కేంద్రాలు ఏకీభవిస్తాయి.

$\Rightarrow$ ఇవి ఏక కేంద్రీయ వృత్తాలు.

$\Rightarrow$ ఈ రెండు వృత్తాలకు గీయగలిగిన ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు సున్న.



ఏక కేంద్రీయ వృత్తాలు

సమస్యలు

1. కేంద్రం (2, 3), వ్యాసార్థం 5 గా గల వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: కేంద్రం $(a, b) = (2, 3)$, $r = 5$ గా గల వృత్త సమీకరణం

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

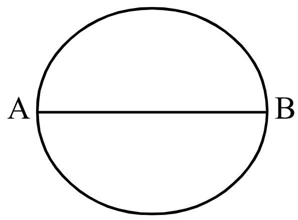
$\Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 - 6y - 25 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

2. (3, 5), (9,3) వ్యాసపు కొనలుగా గల వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $A = (x_1, y_1) = (3, 5)$, $B = (x_2, y_2) = (9, 3)$ లు



వ్యాసపు కొనలుగా గల వృత్త సమీకరణం

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 3)(x - 9) + (y - 5)(y - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 9x - 3x + 27 + y^2 - 3y - 5y + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 12x - 8y + 42 = 0$

3. క్రింది వృత్తాలకు కేంద్రం మరియు వ్యాసార్థాలను కనుక్కోండి.

(i) $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 41 = 0$

(ii) $3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$

సాధన: (i) దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 41 = 0$

దీనిని వృత్త ప్రామాణిక సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$2g = -4,\ 2f = -8,\ c = -41$

$\Rightarrow \quad g = \frac{-4}{2} = -2,\ f = \frac{-8}{2} = -4, c = -41.$

$\therefore$ కేంద్రం $= (-g, -f) = (-(-2), -(-4)) = (2, 4)$

వ్యాసార్ధం $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - (-41)} = \sqrt{4+16+41} = \sqrt{61}$

(ii) దత్త వృత్తం $3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{5x}{3} - \frac{6y}{3} + \frac{4}{3} = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - 2y + \frac{4}{3} = 0$

ఈ సమీకరణాన్ని ప్రామాణిక రూపం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

[**గమనిక:** వృత్త సమీకరణాన్ని ఎపుడైనా సరే, ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయాలి అంటే x^2 గుణకం $= y^2$ గుణకం $= 1$ అయ్యేటట్లుగా వ్రాయాలి. అందువల్ల x^2 గుణకం $= y^2$ గుణకం $= 1$ అవ్వాలి కనక, సమీకరణంలోని ప్రతి పదాన్ని 3తో భాగించవలెను]

$2g = \frac{-5}{3},\ 2f = -2,\ c = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad g = \frac{-5}{6},\ f = -1,\ c = \frac{4}{3}$

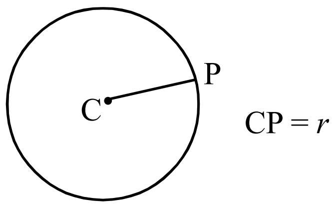
$\therefore$ కేంద్రం $= (-g, -f) = \left(\frac{5}{6}, 1\right)$

వ్యాసార్ధం $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{-5}{6}\right)^2 + (-1)^2 - \frac{4}{3}}$

$= \sqrt{\frac{25}{36} + 1 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{25+36-48}{36}}$

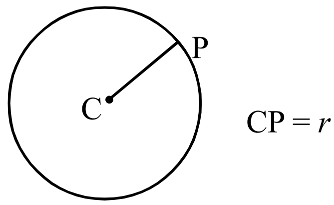
$= \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$

గమనిక: వృత్త కేంద్రం C అయి, వృత్తం బిందువు P గుండా పోతే CP వృత్త వ్యాసార్ధం అవుతుంది.



4. (2, 3) కేంద్రంగా ఉంటూ (2, –1) గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కేంద్రం = C = (a, b) = (2, 3)   P = (2,–1) అనుకోండి.



వృత్తం P గుండా పోతుంది. కనక

వ్యాసార్థం = CP దూరం

$$= \sqrt{(2-2)^2 + (3+1)^2} \quad \text{(దూరానికి సూత్రం : } \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\text{)}$$

$$= \sqrt{0+16}$$

$$= \sqrt{16} = 4 = r.$$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Rightarrow$ $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 + 9 - 16 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

రెండవ పద్ధతి

వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము. ... (1)

వృత్త కేంద్రం $(-g, -f) = (2, 3)$

$\Rightarrow$ $-g = 2, -f = 3$

$\Rightarrow$ $\boxed{g = -2}$, $\boxed{f = -3}$

ఇపుడు, వృత్తం (1) $x^2 + y^2 + 2(-2)\,x + 2\,(-3)\,y + c = 0$ అవుతుంది.

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ ... (2)

ఇది (2, –1) గుండా పోతుంది. కనక సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తుంది.

$\Rightarrow$ (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$(2)^2 + (-1)^2 - 4(2) - 6(-1) + c = 0$ అని వస్తుంది.

$\Rightarrow$ $4 + 1 - 8 + 6 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -3}$

g, f, c విలువలను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

కావలసిన వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

5. క్రింది వృత్తాల పరామితీయ సమీకరణాలను రాబట్టుము.

(i) $4(x^2 + y^2) = 9$

(ii) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

సాధన:

(i) దత్త వృత్తం $4(x^2 + y^2) = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ ఈ వృత్తాన్ని

$x^2 + y^2 = r^2$ సమీకరణంతో పోల్చగా $r^2 = \frac{9}{4}$ వస్తుంది.

వృత్త కేంద్రం $(0, 0) = (x_1, y_1) \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలు

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + r\cos\theta \\ y = y_1 + r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 + \frac{3}{2}\cos\theta \\ y = 0 + \frac{3}{2}\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{2}\cos\theta \\ y = \frac{3}{2}\sin\theta \end{array}\right\}$$

ఇచ్చట $(x_1, y_1) =$ కేంద్రం, $\quad 0 \le \theta < 2\pi$

(ii) దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ ని

ప్రామాణిక సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$2g = -4, \quad 2f = -6, \; c = -12$

$g = -2, \quad f = -3, \; c = -12$

$\therefore$ కేంద్రం $= (-g, -f) = (2, 3) = (x_1, y_1)$

వ్యాసార్ధం $= r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ వృత్త పరామితీయ సమీకరణాలు

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + r\cos\theta \\ y = y_1 + r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 + 5\cos\theta \\ y = 3 + 5\sin\theta, \; 0 \le \theta < 2\pi \end{array}\right\}$$

6. $ax^2 + bxy + 3y^2 - 5x + 2y - 3 = 0$ సమీకరణం వృత్తాన్ని సూచిస్తే a, b విలువలు, కేంద్రాన్ని, వ్యాసార్థాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సమీకరణం is $ax^2 + bxy + 3y^2 - 5x + 2y - 3 = 0$

వృత్తాన్ని సూచించాలంటే, x^2 గుణకం $= y^2$ గుణకం, xy గుణకం $= 0$

$\Rightarrow$ $a = 3,\ b = 0$

$\therefore$ వృత్తం $3x^2 + 3y^2 - 5x + 2y - 3 = 0$

3 చే భాగించగా

$$\Rightarrow \quad \frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{5x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{3}{3} = \frac{0}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$$

ఈ సమీకరణాన్ని $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$$2g = \frac{-5}{3},\ \ 2f = \frac{2}{3},\ \ c = -1$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{-5}{6},\ f = \frac{1}{3},\ \ c = -1$$

$\therefore$ కేంద్రం $= (-g, -f) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

వ్యాసార్థం $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - (-1)}$

$$= \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{25+4+36}{36}} = \sqrt{\frac{65}{36}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{65}}{6}$$

$\therefore$ వ్యాసార్థం $= \frac{\sqrt{65}}{6}$

7. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + c = 0$ సూచించే వృత్త వ్యాసార్థం 6 అయితే c విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - 4x + 6y + c = 0$ ని

వృత్త ప్రామాణిక సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$2g = -4,\ 2f = 6,\ c = c$

$\Rightarrow \quad g = -2, f = 3, c = c$

$\therefore$ వ్యాసార్థం = 6 $\Rightarrow \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 6$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$g^2 + f^2 - c = 6^2$

$\Rightarrow \quad (-2)^2 + 3^2 - c = 36$

$\Rightarrow \quad -c = 36 - 4 - 9$

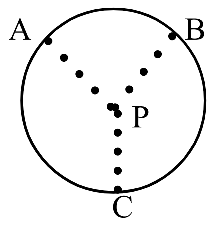
$\Rightarrow \quad -c = 23 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -23}$

8. (3, –4), (1, 2), (5, –6) బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol : A = (3, –4), B = (1, 2), C = (5, –6) అనుకోండి.

A, B, C బిందువుల గుండా పోయే వృత్త యొక్క కేంద్రం $P(x_1, y_1)$ అనుకోండి.

అపుడు PA = PB = PC = వృత్త వ్యాసార్థం



ఇపుడు PA = PB $\Rightarrow \sqrt{(x_1-3)^2+(y_1+4)^2} = \sqrt{(x_1-1)^2+(y_1-2)^2}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా, $(x_1 - 3)^2 + (y_1 + 4)^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2 + 8y_1 + 16 = x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 4y_1 + 4$

$\Rightarrow \quad -6x_1 + 8y_1 + 25 + 2x_1 + 4y_1 - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad -4x_1 + 12y_1 + 20 = 0$

$\Rightarrow \quad 4(-x_1 + 3y_1 + 5) = 0$

$\Rightarrow \quad -x_1 + 3y_1 + 5 = 0 \quad \ldots (1)$

మరలా PB = PC $\Rightarrow$ ఇరువైపులా వర్గం చేయగా, $PB^2 = PC^2$

$\Rightarrow \quad (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = (x_1 - 5)^2 + (y_1 + 6)^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 4y_1 + 4 = x_1^2 - 10x_1 + 25 + y_1^2 + 12y_1 + 36$

$\Rightarrow \quad -2x_1 - 4y_1 + 5 + 10x_1 - 12y_1 - 61 = 0$

$\Rightarrow \quad 8x_1 - 16y_1 - 56 = 0$

$\Rightarrow \quad 8(x_1 - 2y_1 - 7) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 - 2y_1 - 7 = 0$ ... (2)

(1), (2) లను సాధించగా

$$\begin{array}{r} -x_1 + 3y_1 + 5 = 0 \\ x_1 - 2y_1 - 7 = 0 \\ \hline y_1 - 2 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad y_1 = 2$

$y_1 = 2$ ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా $x_1 - 2(2) - 7 = 0$ వస్తుంది.

$\Rightarrow \quad x_1 = 4 + 7 = 11$

$\therefore \quad P = (x_1, y_1) = (11, 2)$ వృత్త కేంద్రము.

వ్యాసార్థము $= PA = \sqrt{(11-3)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

$r = 10$

$\therefore$ A, B, C ల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

$\Rightarrow \quad (x - 11)^2 + (y - 2)^2 = 10^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$

గమనిక: కేంద్రం $(a, b) = (x_1, y_1)$, $(x - a)^2 - (y - b)^2 = r^2$ వృత్త సమీకరణం.

9. (1, 2), (3, –4), (5, –6), (19, 8) బిందువులు చక్రీయాలని చూపి, వాటిగుండా పోయే వృత్త సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త బిందువులు A = (1, 2), B = (3, –4), C = (5, –6), D = (19, 8) అనుకొనుము. ఈ బిందువులు ఒకే వృత్తంపై వుంటే చక్రీయాలవుతాయి.

$S = (x_1, y_1)$, A, B, C ల గుండా పోయే వృత్త కేంద్రం అనుకొనుము.

అపుడు SA = SB = SC

$SA = SB \quad \Rightarrow \quad SA^2 = SB^2$

$\Rightarrow \quad (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = (x_1 - 3)^2 + (y_1 + 4)^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 4y_1 + 4 = x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2 + 8y_1 + 16$

$\Rightarrow \quad -2x_1 - 4y_1 + 5 + 6x_1 - 8y_1 - 25 = 0$

$\Rightarrow \quad 4x_1 - 12y_1 - 20 = 0$

$\Rightarrow \quad 4(x_1 - 3y_1 - 5) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 - 3y_1 - 5 = 0$ ... (1)

మరలా SB = SC $\Rightarrow$ $SB^2 = SC^2$

$\Rightarrow \quad (x_1 - 3)^2 + (y_1 + 4)^2 = (x_1 - 5)^2 + (y_1 + 6)^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2 + 8y_1 + 16 = x_1^2 - 10x_1 + 25 + y_1^2 + 12y_1 + 36$

$\Rightarrow \quad -6x_1 + 8y_1 + 25 + 10x_1 - 12y_1 - 61 = 0$

$\Rightarrow \quad 4x_1 - 4y_1 - 36 = 0$

$\Rightarrow \quad 4(x_1 - y_1 - 9) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 - y_1 - 9 = 0$ ... (2)

(1), (2) లను సాధించగా

$$\begin{array}{r} x_1 - 3y_1 - 5 = 0 \\ x_1 - y_1 - 9 = 0 \\ \underline{- \quad + \quad +} \\ -2y_1 + 4 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad -2y_1 = -4$

$\Rightarrow \quad y_1 = \dfrac{-4}{-2} = 2$

$y_1 = 2$ ని (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $x_1 - 3(2) - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 11$

$\therefore$ కేంద్రం $= (x_1, y_1) = (11, 2)$

$\therefore$ వ్యాసార్థం $= SA = \sqrt{(11-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$

$\therefore$ A, B, C ల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

$\Rightarrow \quad (x - 11)^2 + (y - 2)^2 = 10^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 22x - 4y + 121 + 4 - 100 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$ ... (3)

ఇపుడు, D = (19, 8) ను (3) ప్రతిక్షేపించగా

$(19)^2 + (8)^2 - 22(19) - 4(8) + 25$

$= 361 + 64 - 418 - 32 + 25$

$= 450 - 450 = 0$

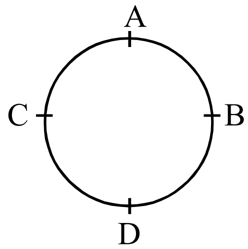
$\Rightarrow$ (3) పై D వుంటుంది. కనక నిరూపించడమైనది.

$\therefore$ నాలుగు బిందువులు A, B, C, D లు (3) పై వుంటాయి.

i.e $x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$

బిందువులు A, B, C, D లు చక్రీయాలు.

గమనిక : నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తంపై వుంటే వాటిని చక్రీయాలు అని అంటారు.



కేంద్రం (a, b), వ్యాసార్థం 'r' గా గల వృత్త సమీకరణం $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

కేంద్రం (x_1, y_1) కనక అయితే అపుడు $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

10. (2, 0), (0, 1), (4, 5), (0, c) లు చక్రీయాలు అయితే, 'c' విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: A (2, 0), B = (0, 1), C = (4, 5), D = (0, c)లు చక్రీయాలు అనుకుందాం. అంటే, బిందువులు ఒకే వృత్తంపై వుంటాయి అనుకుంటే

A, B, C, D బిందువుల గుండా పోయే వృత్త కేంద్రం S = (x_1, y_1) అనుకుందాం.

అపుడు SA = SB = SC = SD

ఇపుడు SA = SB, ఇరువైపులా వర్గం చేయగా$SA^2 = SB^2$

$\Rightarrow (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 0)^2 = (x_1 - 0)^2 + (y_1 - 1)^2$

$\Rightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2y_1 + 1$

$\Rightarrow -4x_1 + 2y_1 + 3 = 0$ ... (1)

మరలా SB = SC

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$SB^2 = SC^2$

$$(x_1-0)^2+(y_1-1)^2=\left(x_1-4\right)^2+(y_1-5)^2$$

$$x_1^2+y_1^2-2y_1+1=x_1^2-8x_1+16+y_1^2-10y_1+25$$

$$8x_1+8y_1-40=0$$

$$2(4x_1+4y_1-20)=0$$

$$4x_1+4y_1-20=0 \qquad \text{.... (2)}$$

(1), (2) లను సాధించగా

$$\begin{array}{r} -4x_1+2y_1+3=0 \\ 4x_1+4y_1-20=0 \\ \hline 6y_1-17=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{17}{6}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$-4x_1+2\left(\frac{17}{6}\right)+3=0$$

$$\Rightarrow \quad -4x_1+\frac{17}{3}+3=0$$

$$\Rightarrow \quad -4x_1+\frac{17+9}{3}=0$$

$$\Rightarrow \quad -4x_1=-\frac{26}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{-26}{-12}=\frac{13}{6}$$

$$\therefore \quad \left(x_1,y_1\right)=\left(\frac{13}{6},\frac{17}{6}\right)$$

ఇపుడు SC = SD $\Rightarrow$ ఇరువైపులా వర్గం చేయగా $SC^2 = SD^2$ or SA = SD $\Rightarrow$ $SA^2 = SD^2$

ఇక్కడ మనము SA = SD (లేదా) SB = SC (లేదా) SC = SD లు తీసుకోవచ్చు.

A = (2, 0) కనక, SA సరళంగా ఉంటుంది. SA = SD ని తీసుకొనగా,

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా $SA^2 = SD^2$

$\Rightarrow \quad (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 0)^2 = (x_1 - 0)^2 + (y_1 - c)^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 - 4x_1 + 4 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2cy_1 + c^2$

$\Rightarrow \quad -4x_1 + 4 = -2cy_1 + c^2$

$$\Rightarrow \quad -4\left(\frac{13}{6}\right) + 4 = -2c\left(\frac{17}{6}\right) + c^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-26}{3} + 4 = \frac{-17c}{3} + c^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-26+12}{3} = \frac{-17c+3c^2}{3}$$

$\Rightarrow \quad -14 = -17c + 3c^2$

$\Rightarrow \quad 3c^2 - 17c + 14 = 0$

$\Rightarrow \quad (c - 1)(3c - 14) = 0$

లేదా $$c = \frac{17 \pm \sqrt{289-168}}{2(3)} = \frac{17 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{17 \pm 11}{6}$$

$$= \frac{28}{6} \text{ or } \frac{6}{6}$$

$$= \frac{14}{3} \text{ or } 1$$

$\therefore \quad c = 1$ లేదా $\frac{14}{3}$, $c = 1$ అయినప్పుడు $D = (0, 1) = B$. కాని, A, B, C, D లు విభిన్నాలు, కనక

$$D = (0, c) = \left(0, \frac{14}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{14}{3}}$$

11. $x^2 + y^2 + 8x + 12y + 15 = 0$ వృత్తంతో సకేంద్రీయమై (2, 3) బిందువు గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 + 8x + 12y + 15 = 0$ ... (1)

(1) తో ఏక కేంద్రీయమైన వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 8x + 12y + k = 0$ ... (2)

($\because$ ఏక కేంద్రీయ వృత్తాల కేంద్రాలు ఒకటే)

ఇది (2, 3) గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow \quad 2^2 + 3^2 + 8(2) + 12(3) + k = 0$

$\Rightarrow \quad 4 + 9 + 16 + 36 + k = 0$

$\Rightarrow \quad k = -65$

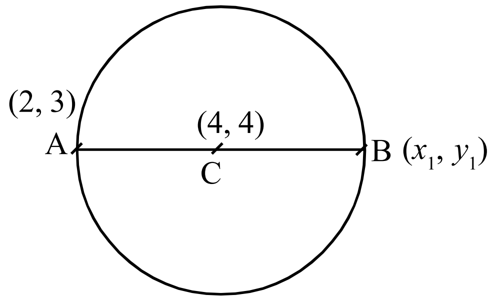
$k = -65$ ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 8x + 12y - 65 = 0$

12. $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 27 = 0$ వృత్తంపై A(2, 3) బిందువు వుంటుందని చూపండి. ఇంకా A గుండా పోయే వ్యాసపు యొక్క మరొక కొన కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 27 = 0$ ... (1)

A(2, 3) ను ప్రతిక్షేపించగా



$2^2 + 3^2 - 8(2) - 8(3) + 27 = 0$

$= 4 + 9 - 16 - 24 + 27$

$= 40 - 40 = 0$

$\Rightarrow$ వృత్తం (1) పై A వుంటుంది.

$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 27 = 0$ వృత్తం కేంద్రం C, AB వ్యాసం అనుకొనుము.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$2g = -8 \qquad 2f = -8 \qquad c = 27$

$\Rightarrow g = -4 \qquad \Rightarrow f = -4$

కేంద్రం $= C = (-g, -f) = (4, 4)$

A = (2, 3) మరియు AB వ్యాసపు మరొక కొన $B = (x_1, y_1)$ అనుకొనుము.

అపుడు AB మధ్య బిందువు C అనుకొనుము.

$$\Rightarrow \quad (4, 4) = \left(\frac{2 + x_1}{2}, \frac{3 + y_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 4 = \frac{2 + x_1}{2}, \quad 4 = \frac{3 + y_1}{2}$$

$\Rightarrow$ $8 = 2 + x_1$, $8 = 3 + y_1$,

$\Rightarrow$ $x_1 = 6$, $y_1 = 5$

$\Rightarrow$ $B = (x_1, y_1) = (6, 5)$ వ్యాసపు మరొక కొన.

13. (4, 1), (6, 5) బిందువుల గుండా పోయే వృత్త కేంద్రం $4x + y - 16 = 0$ రేఖపై వుంటే ఆ వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: మొదటి పద్ధతి

A (4, 1), B (6, 5) బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము. ... (1)

అపుడు బిందువు A (4, 1), (1) పై వుంటుంది.

$\Rightarrow$ $4^2 + 1^2 + 2g(4) + 2f(1) + c = 0$

$\Rightarrow$ $17 + 8g + 2f + c = 0$ ... (2)

మరలా B(6, 5) (1) పై వుంటుంది.

$\Rightarrow$ $6^2 + 5^2 + 2g(6) + 2f(5) + c = 0$

$\Rightarrow$ $61 + 12g + 10f + c = 0$ ... (3)

ఇపుడు కేంద్రం $(-g, -f)$, $4x + y - 16 = 0$ రేఖపై వుంటుంది.

$\Rightarrow$ $4(-g) + (-f) - 16 = 0$

$\Rightarrow$ $-(4g + f + 16) = 0$

$\Rightarrow$ $4g + f + 16 = 0$ ... (4)

(2) – (3)

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 17 + 8g + 2f + c = 0 \\ 61 + 12g + 10f + c = 0 \\ - \quad - \quad - \quad - \\ \hline -44 - 4g - 8f = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $-4(11 + g + 2f) = 0$

$\Rightarrow$ $11 + g + 2f = 0$ ... (5)

(4), (5) లను సాధించగా

$$2 \times (4) \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 8g + 2f + 32 = 0 \\ g + 2f + 11 = 0 \\ - \quad - \quad - \\ \hline 7g + \quad 21 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad g = \dfrac{-21}{7} = -3 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{g = -3}$

$g = -3$ ను (4) లో ప్రతిక్షేపించగా

$4(-3) + f + 16 = 0$

$\Rightarrow \quad f = -16 + 12 = -4 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{f = -4}$

$g = -3,\ f = -4$ లను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా

$61 + 12(-3) + 10(-4) + c = 0$

$\Rightarrow \quad 61 - 36 - 40 + c = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{c = 15}$

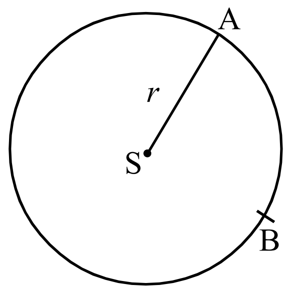
(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(-4)y + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

రెండో పద్ధతి

A(4, 1), B(6, 5) ల గుండా పోయే వృత్త కేంద్రం $S = (x_1, y_1)$ అనుకొనుము. అపుడు SA = SB



$\Rightarrow \quad SA^2 = SB^2$

$\Rightarrow \quad (x_1 - 4)^2 + (y_1 - 1)^2 = (x_1 - 6)^2 + (y_1 - 5)^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 - 8x_1 + 16 + y_1^2 - 2y_1 + 1$

$\qquad = x_1^2 - 12x_1 + 36 + y_1^2 - 10y_1 + 25$

$\Rightarrow \quad -8x_1 - 2y_1 + 17 + 12x_1 + 10y_1 - 61 = 0$

$\Rightarrow \quad 4x_1 + 8y_1 - 44 = 0 \qquad \ldots (1)$

ఇపుడు కేంద్రం $S(x_1, y_1)$, $4x + y - 16 = 0$ రేఖపై వుంటుంది.

$\Rightarrow \quad 4x_1 + y_1 - 16 = 0 \qquad \ldots (2)$

(1), (2) లను సాధించగా

$$4x_1 + 8y_1 + 44 = 0$$
$$4x_1 + \ y_1 - 16 = 0$$
$$- \quad - \qquad +$$
$$7y_1 - 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{28}{7} = 4$$

$y_1 = 4$ ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$4x_1 + 4 - 16 = 0$

$\Rightarrow \quad 4x_1 = 12 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{12}{4} = 3$

$\therefore \quad S = (x_1, y_1) = (3, 4)$, కావలసిన వృత్త కేంద్రం.

వ్యాసార్థము = SA దూరం = $\sqrt{(3-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

$\Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 10$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

14. వృత్త కేంద్రం x-అక్షంపై ఉంటూ $(-2, 3)$, $(4, 5)$ బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: మొదటి పద్ధతి

కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము. ... (1)

దీని కేంద్రం $(-g, -f)$, x-అక్షంపై వుంది.

$\Rightarrow \quad \boxed{f = 0}$

$(-2, 3)$ గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow \quad (-2)^2 + 3^2 + 2g(-2) + 2(0)(3) + c = 0 \qquad \because \ f = 0$

$\Rightarrow \quad 13 - 4g + c = 0$ ... (2)

$(4, 5)$ గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow \quad 4^2 + 5^2 + 2g(4) + 0 + c = 0$

$\Rightarrow \quad 41 + 8g + c = 0$ ... (3)

(2), (3) లను సాధించగా

$$13 - 4g + c = 0$$
$$41 + 8g + c = 0$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-28 - 12g = 0 \quad \Rightarrow \quad -12g = 28$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g = \frac{28}{-12} = \frac{-7}{3}}$$

$g = \frac{-7}{3}$ ను (2) లు ప్రతిక్షేపించగా

$$13 - 4\left(\frac{-7}{3}\right) + c = 0 \Rightarrow 13 + \frac{28}{3} + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{39+28}{3} + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{67}{3} + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = -\frac{67}{3}$$

g, f, c విలువలను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-7}{3}\right)x + 2(0)y - \frac{67}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3(x^2 + y^2) - 14x - 67 = 0$$

రెండవ పద్ధతి

వృత్త కేంద్రం x-అక్షంపై వుంది. కనక

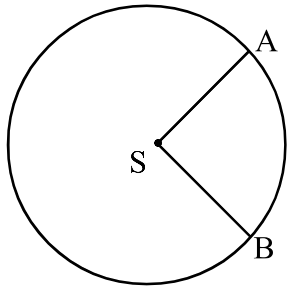
$S = (x_1, 0)$ బిందువును కేంద్రం అనుకొనుము.

వృత్తం A(–2, 3), B(4, 5) గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow \quad SA = SB$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$SA^2 = SB^2$



$\Rightarrow \quad (x_1 + 2)^2 + (0 - 3)^2 = (x_1 - 4)^2 + (0 - 5)^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 + 4x_1 + 4 + 9 = x_1^2 + 16 - 8x_1 + 25$

$\Rightarrow \quad 4x_1 + 13 + 8x_1 - 41 = 0$

$\Rightarrow \quad 12x_1 - 28 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$

$\therefore$ కేంద్రం $S = (x_1, 0) = \left(\frac{7}{3}, 0\right)$

వ్యాసార్థం $= r = \text{Dist SA} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}+2\right)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{7+6}{3}\right)^2 + 9}$

$= \sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2 + 9} = \sqrt{\frac{169}{9} + 9} = \sqrt{\frac{250}{9}}$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$(x - x_1)^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{\frac{250}{9}}\right)^2$$

$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{250}{9}$

$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{49}{9} - \frac{14}{3}x + y^2 = \frac{250}{9}$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{14x}{3} = \frac{250}{9} - \frac{49}{9}$

$\Rightarrow \quad \frac{3x^2 + 3y^2 - 14x}{3} = \frac{67}{3}$

$\Rightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$

15. A, B బిందువులు x-నిరూపకాలు $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ కు మూలాలు. y-నిరూపకాలు $y^2 + 2py - q^2 = 0$ కు మూలాలు అయితే A, B లు వ్యాసాగ్రాలుగా వుండే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ అనుకొనుము.

అపుడు x_1, x_2 లు $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ కు మూలాలు.

y_1, y_2 లు $y^2 + 2py - q^2 = 0$ కు మూలాలు.

ఎందుకంటే A, B ల నిరూపకాలు $x_1,\ x_2$,

A, B ల నిరూపకాలు y_1, y_2.

ఇపుడు $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ సమీకరణానికి

మూలాల మొత్తం $= x_1 + x_2 = \dfrac{-(2a)}{1} = -2a$

మూలాల లబ్ధం $= x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b^2}{1} = -b^2$

అలాగే $y^2 + 2py - q^2 = 0$ సమీకరణానికి

మూలాల మొత్తం $= y_1 + y_2 = \dfrac{-2p}{1} = -2p$

మూలాల లబ్ధం $= y_1 \cdot y_2 = \dfrac{-q^2}{1} = -q^2$

ఇపుడు $\overline{AB}$ వ్యాసంగా గల వృత్త సమీకరణం $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 + y^2 - y_1 y - y_2 y + y_1 y_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + (x_1 x_2 + y_1 y_2) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2ax + 2py - b^2 - q^2 = 0$

[గమనిక: $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణానికి

మూలాల మొత్తం $= \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ గుణకం})}{x^2 \text{ గుణకం}}$

మూలాల లబ్ధం $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{(\text{స్థిరాంకం})}{x^2 \text{ గుణకం}}$

16. (0, 0) గుండా పోతూ x, y-అక్షాలపై వరసగా 4, 3 అంతరఖండాలు చేసే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము. ... (1)

ఇది (0, 0) గుండా పోతుంది $\Rightarrow \boxed{c = 0}$

దీని x-అంతరఖండం 4

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{g^2 - c} = 4 \quad \Rightarrow \sqrt{g^2 - 0} = \frac{4}{2}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{g^2} = 2 \quad \Rightarrow \pm\, g = 2$

$\Rightarrow \quad \boxed{g = \pm\, 2}$

అలాగే, y - అంతరఖండం 3

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{f^2 - c} = 3 \quad \Rightarrow 2\sqrt{f^2 - 0} = 3 \Rightarrow \sqrt{f^2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad \pm\, f = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{f = \pm\frac{3}{2}}$

(1) లో g, f, c విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 \pm 4x \pm 3y = 0$

17. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a, x\sin\alpha - y\cos\alpha = b$ (α పరామితి) సరళరేఖల ఖండన బిందువు బిందుపథం ఒక వృత్తమని చూపండి.

సాధన: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a, x\sin\alpha - y\cos\alpha = b$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు (x_1, y_1) అనుకొనుము.

$\Rightarrow \quad x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha = a \quad \ldots (1)$

$x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha = b \quad \ldots (2)$

(1), (2) లను వర్గముచేసి కూడగా

$(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)^2 + (x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha)^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2\cos^2\alpha + y_1^2\sin^2\alpha + 2x_1y_1 \sin\alpha\cos\alpha$

$+ x_1^2\sin^2\alpha + y_1^2\cos^2\alpha - 2x_1y_1 \sin\alpha\cos\alpha = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + y_1^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = a^2 + b^2$

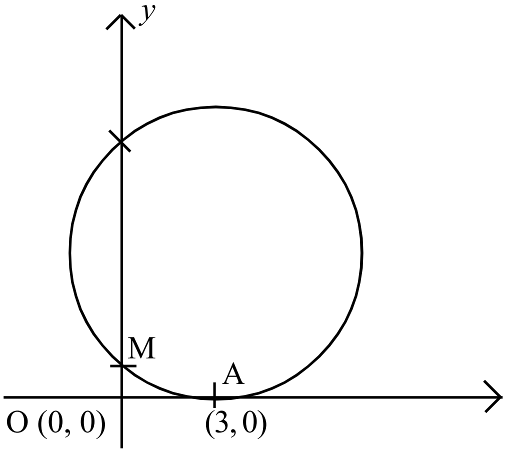
$\Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad (x_1, y_1)$ బిందుపథం $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

ఇది కేంద్రం $(0, 0)$, వ్యాసార్థం $\sqrt{a^2 + b^2}$ గా గల వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

18. మూలబిందువు నుండి 3 యూనిట్ల దూరంలో x-అక్షాన్ని స్పృశిస్తూ, y-అక్షంపై 6 యూనిట్ల అంతరఖండం చేసే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము. ... (1)



ఇది x-అక్షాన్ని A వద్ద స్పృశిస్తుంది.

$\Rightarrow \quad g^2 = c$ ... (2)

ఇది x-అక్షాన్ని, మూల బిందువు నుండి 3 యూనిట్ల దూరంలో స్పృశిస్తుంది.

$\Rightarrow \quad OA = 3 \quad \Rightarrow \quad A = (3, 0)$ వృత్తంపై బిందువు.

$\Rightarrow$ (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $3^2 + 0^2 + 2g(3) + 2f(0) + g^2 = 0$, (2) నుండి $g^2 = c$

$\Rightarrow \quad g^2 + 6g + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad (g + 3)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad g + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = -3}$

$\Rightarrow \quad \boxed{c = g^2 = 9}$

వృత్త y-అంతరఖండం = 6

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{f^2 - c} = 6$

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{f^2 - 9} = 6$

$\Rightarrow \quad \sqrt{f^2 - 9} = \frac{6}{2} = 3$

$\Rightarrow \quad \sqrt{f^2 - 9} = 3$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా $f^2 - 9 = 3^2$

$\Rightarrow \quad f^2 = 9 + 9 = 18 \quad \Rightarrow \quad f = \pm\sqrt{18}$

$\Rightarrow \quad f = \pm\sqrt{18}$

$\Rightarrow \quad \boxed{f = \pm 3\sqrt{2}}$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2\left(\pm 3\sqrt{2}\right)y + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x \pm 6\sqrt{2y} + 9 = 0$$

19. $S = x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(3, 4)$ బిందువు స్థితిని తెలపండి.

సాధన: $S = x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0, \qquad P(3, 4)$

$S_{11} = 3^2 + 4^2 - 4(3) - 6(4) - 12 = 9 + 16 - 12 - 24 - 12$

$= -23 < 0$

$\Rightarrow$ $P(3, 4)$ బిందువు వృత్తం అంతర్భాగంలో వుంటుంది.

20. $S = x^2 + y^2 + 8x + 12y + 15 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(5, -6)$ బిందు శక్తి కనుక్కోండి.

సాధన: $P = (x_1, y_1) = (5, -6), \quad S = x^2 + y^2 + 8x + 12y + 15 = 0$

$\therefore$ $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా 'P' బిందు శక్తి $= S_{11}$

$= 5^2 + (-6)^2 + 8(5) + 12(-6) + 15$

$= 25 + 36 + 40 - 72 + 15$

$= 44$

21. బిందువు $P(1, 3)$ నుండి $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవును కనుక్కోండి.

సాధన: $(x_1, y_1) = P(1, 3)$ నుండి $S = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S_{11}}$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 4y_1 - 11} = \sqrt{1 + 9 - 2 + 12 - 11} = \sqrt{9} = 3$$

22. బిందువు $(2, 5)$ నుంచి $x^2 + y^2 - 5x + 4y + k = 0$ కు గల స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయితే k విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $P(x_1, y_1) = (2, 5)$ బిందువు నుండి $S = x^2 + y^2 - 5x + 4y + k = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S_{11}} = \sqrt{37}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా $S_{11} = 37$

$\Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 - 5x_1 + 4y_1 + k = 37$

$\Rightarrow \quad 2^2 + 5^2 - 5(2) + 4(5) + k = 37$

$\Rightarrow \quad 4 + 25 - 10 + 20 + k = 37$

$\Rightarrow \quad k = 37 - 39$

$\Rightarrow \quad \boxed{k = -2}$

23. చలించే బిందువు P నుంచి $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$ వృత్తాలకు గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానం అయితే P యొక్క బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $P = (x_1, y_1)$ అనుకొనుము.

$S = x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ & $S^1 = x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$ అనుకొనుము.

P నుంచి $S = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు $= \sqrt{S_{11}}$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 6y_1 - 12}$$

P నుంచి $S^1 = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S'_{11}}$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 + 18y_1 + 26}$$

దత్తాంశము $\sqrt{S_{11}} : \sqrt{S'_{11}} = 2 : 3$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{S_{11}}}{\sqrt{S'_{11}}} = \dfrac{2}{3}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$\dfrac{S_{11}}{S'_{11}} = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow \quad 9\,S_{11} = 4S'_{11}$

$\Rightarrow \quad 9(x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 6y_1 - 12) = 4(x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 + 18y_1 + 26)$

$\Rightarrow \quad 9x_1^2 + 9y_1^2 - 36x_1 - 54y_1 - 108 - 4x_1^2 - 4y_1^2 - 24x_1 - 72y_1 - 104 = 0$

$\Rightarrow \quad 5x_1^2 + 5y_1^2 - 60x_1 - 126y_1 - 212 = 0$

$\therefore \quad P(x_1, y_1)$ యొక్క బిందుపథం

$5x^2 + 5y^2 - 60x - 126y - 212 = 0$

24. $(3, -1)$ వద్ద $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ కనుక్కోండి. ఇంకా, ఈ స్పర్శరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న స్పర్శరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ ... (1)

$P = (x_1, y_1) = (3, -1)$ అనుకొనుము.

$S_{11} = 3^2 + (-1)^2 - 2(3) + 4(-1) = 9 + 1 - 6 - 4 = 10 - 10 = 0$

$\Rightarrow$ వృత్తం (1) పై P వుంది.

$\therefore$ P వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1 = 0$

$\Rightarrow$ $x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) = 0$

$\Rightarrow$ $x(3) + y(-1) + (-1)(x + 3) + 2(y - 1) = 0$

$\Rightarrow$ $3x - y - x - 3 + 2y - 2 = 0$

$\Rightarrow$ $2x + y - 5 = 0$ ... (2)

వృత్త కేంద్రం $C = (-g, -f)$

$\Rightarrow$ $C = (1, -2)$

$\overline{PCB}$ వ్యాసపు మరొక కొన B అనుకొనుము.

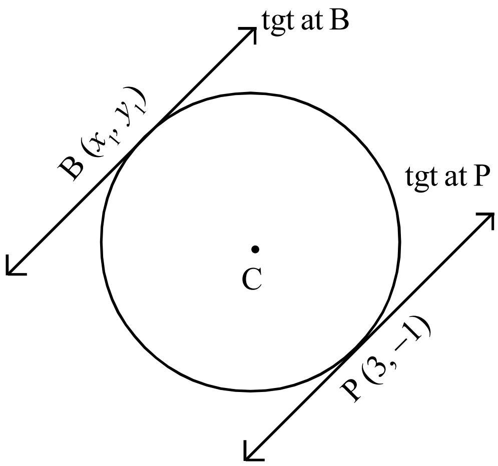
$B = (x_1, y_1)$ అనుకుంటే $C = PB$ ల మధ్య బిందువు

$\Rightarrow$ $(1, -2) = \left(\dfrac{3 + x_1}{2}, \dfrac{-1 + y_1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $1 = \dfrac{3 + x_1}{2}, \quad -2 = \dfrac{-1 + y_1}{2}$

$\Rightarrow$ $2 = 3 + x_1 \quad \Rightarrow -4 = -1 + y_1$

$\Rightarrow$ $\boxed{x_1 = -1} \quad \Rightarrow \boxed{y_1 = -3}$



$\therefore$ వ్యాసపు మరొక కొన $B = (x_1, y_1)$

$= (-1, -3)$

$\therefore$ (2) కి సమాంతరంగా వున్న స్పర్శరేఖ B గుండా పోతుంది.

(2) కి సమాంతరంగా వున్న ఏ రేఖ సమీకరణమైనా $2x + y + k = 0$ అవుతుంది. ... (3)

ఇది B గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow \quad 2(-1) + (-3) + k = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{k = 5}$

(3) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన స్పర్శరేఖ

(2) కి సమాంతరంగా వుండేది, $2x + y + 5 = 0$

25. బిందువు 30° (θ పరామితీయ విలువ) వద్ద $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 39 = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 39 = 0$ ను ప్రామాణిక సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా $2g = 4, 2f = 6, c = -39$

$\Rightarrow \quad g = 2, f = 3, c = -39 \qquad \theta = 30^\circ$

$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+9+39} = \sqrt{52}$

$30^\circ = \theta$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $(x + g)\cos\theta + (y + f)\sin\theta = r$

$\Rightarrow \quad (x+2)\cos 30^\circ + (y+3)\sin 30^\circ = \sqrt{52}$

$$\Rightarrow \quad (x+2)\times\frac{\sqrt{3}}{2} + (y+3)\times\frac{1}{2} = 2\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}(x+2)+(y+3)}{2} = 2\sqrt{13}$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3x} + 2\sqrt{3} + y + 3 = 4\sqrt{13}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x + y + 3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{13} = 0$

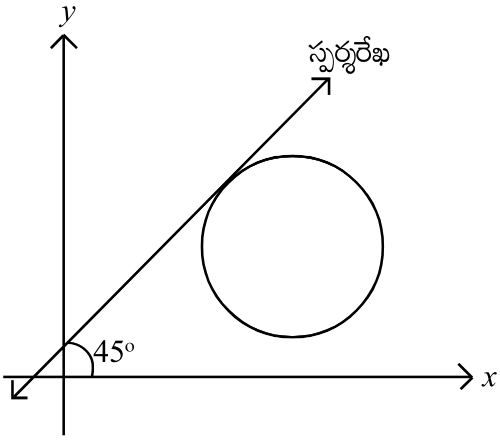
26. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖలు x-అక్షంతో 45° కోణం చేస్తే వాటి సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ ను ప్రామాణిక సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా $2g = -4, 2f = -6, c = 3$ అగును.

$\Rightarrow \quad g = -2, f = -3, c = 3$

వ్యాసార్థం $= r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+9-3} = \sqrt{10}$



దత్తాంశము, x-అక్షంతో స్పర్శరేఖ చేసే కోణం 45°.

$\Rightarrow$ స్పర్శరేఖ వాలు $= m = \text{Tan } 45^\circ = 1$

$\therefore$ కావలసిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y + f = m\,(x + g) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow \quad y-3 = 1(x-2) \pm \sqrt{10}\,\sqrt{1+1}$$

$$\Rightarrow \quad x-y+1 \pm 2\sqrt{5} = 0$$

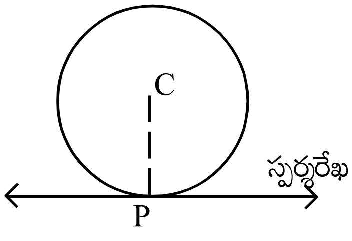
27. $x^2 + y^2 - 3x + 7y + 14 = 0$ వృత్తాన్ని $x + y + 1 = 0$ సరళరేఖ స్పృశిస్తుందని చూపి, స్పర్శబిందువును కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం S = $x^2 + y^2 - 3x + 7y + 14 = 0$ ను

ప్రామాణిక రూపం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$2g = -3, \qquad 2f = 7, \qquad c = 14$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{-3}{2}, \qquad f = \frac{7}{2}, \qquad c = 14$$



స్పర్శరేఖ స్పర్శబిందువు

వ్యాసార్ధం $= r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49}{4} - 14}$

$$= \sqrt{\frac{9+49}{4} - 14} = \sqrt{\frac{29}{2} - 14} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

d = కేంద్రం C నుండి $x + y + 1 = 0$ సరళరేఖకు గల లంబదూరం $= (-g, -f) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{7}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{3 - 7 + 2}{2}\right|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = r$$

$\because$ $r = d$, $x + y + 1 = 0$ రేఖ $S = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

$P(h, k)$ స్పర్శబిందువు అనుకొనుము.

P, కేంద్రం నుండి $x + y + 1 = 0$ రేఖకు గీసిన లంబానికి లంబపాదం అనుకొనుము.

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right) = (x_1\ y_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} = \frac{-(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

ఇచట $ax + by + c = x + y + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{h - \frac{3}{2}}{1} = \frac{k + \frac{7}{2}}{1} = \frac{-\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2} + 1\right)}{1^2 + 1^2}$$

$$h - \frac{3}{2} = k + \frac{7}{2} = \frac{-\left(\frac{3 - 7 + 2}{2}\right)}{2}$$

$$h - \frac{3}{2} = k + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad h - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \qquad k + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad k = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ స్పర్శబిందువు $P = (h, k) = (2, -3)$

28. $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0$ వృత్తం $3x - y + 4 = 0$ రేఖపై ఏర్పరిచే జ్యా పొడవు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $S = x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0$ ను

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ప్రామాణిక రూపంతో పోల్చగా

$2g = 8, 2f = -4, c = -16$

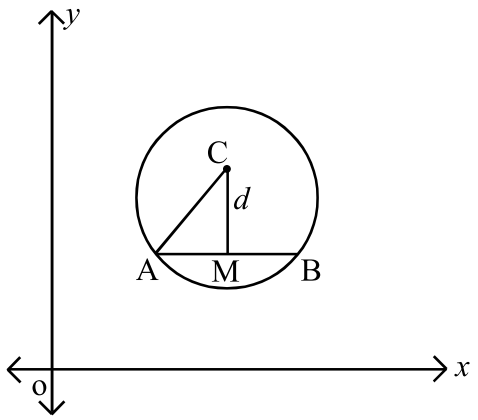
$\Rightarrow \quad g = 4, f = -2, c = -16$

వ్యాసార్థం $= r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 16}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

కేంద్రం $= C = (-g, -f) = (-4, 2) = (x_1, y_1)$



జ్యా $\overline{AB}$ సమీకరణం $3x - y + 4 = 0$ అనుకొనుము. ... (1)

$CM = d =$ కేంద్రం C నుండి జ్యా (1) కి గల లంబదూరం.

$= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (సూత్రం)

$\therefore \quad ax + by + c = 3x - y + 4 = 0, a = 3, b = -1, c = 4$

$$= \frac{|-4(3) + (-1)(2) + 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$\therefore$ జ్యా పొడవు AB

$$= 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

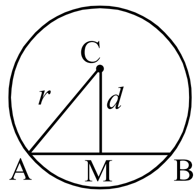
$= 2\sqrt{6^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2}$

$= 2\sqrt{36-10}$

$= 2\sqrt{26}$ యూనిట్లు.

29. $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తం $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ రేఖపై ఏర్పరిచే జ్యా పొడవును కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 = a^2$



వృత్త కేంద్రం $(0, 0) = C$

వ్యాసార్ధం $= r = a$

దత్త జ్యా సమీకరణం

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ ను ... (1)

$ax + by + c = 0$ తో పోల్చగా

$a = \cos\alpha,\ b = \sin\alpha,\ c = -p$

$\therefore$ $d = CM$ = కేంద్రం $C = (0, 0) = (x_1, y_1)$ నుండి జ్యాకు గల లంబదూరం

$= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (సూత్రం)

$= \left|\dfrac{\cos\alpha\,(0) + \sin\alpha\,(0) - p}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}\right| = |-p| = p$

$\therefore$ AB జ్యా పొడవు $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$2\sqrt{a^2 - p^2}$ యూనిట్లు.

30. వృత్తం $x^2 + y^2 = c^2$, సరళరేఖ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ లు A, B ల వద్ద ఖండించుకుంటే $\overline{AB}$ పొడవు కనుక్కొని ఈ రేఖ వృత్తాన్ని స్పృశించడానికి నియమం కనుక్కోండి.

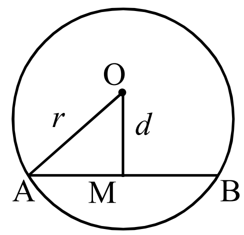
సాధన: దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 = c^2$

కేంద్రం $O = (0, 0)$

వ్యాసార్ధం $= r = c$

జ్యా AB సమీకరణం $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ... (1)

$d =$ కేంద్రం O (0, 0) నుండి జ్యా (1) కి గల లంబదూరం



$= OM$

$= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (సూత్రం) ఇచ్చట $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$= \frac{\left|\frac{o}{a}+\frac{o}{b}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}$$

$\because$ రేఖ (1) : $\dfrac{1}{a}\cdot x+\dfrac{1}{b}\cdot y-1=0$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

ఇపుడు జ్యా $\overline{AB}$ పొడవు

$= 2\sqrt{r^2-d^2}$

$$= 2\sqrt{c^2-\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}$$

$$= 2\times\sqrt{c^2-\frac{a^2b^2}{b^2+a^2}}$$

జ్యా పొడవు సున్న అయితే, రేఖ (1) వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది లేదా వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుంది.

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{c^2-\frac{a^2b^2}{b^2+a^2}}=0$$

$$\Rightarrow \quad c^2-\frac{a^2b^2}{b^2+a^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad c^2=\frac{a^2b^2}{b^2+a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2 b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2 b^2}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{a^2}$, ఇది కావలసిన నియమం.

31. $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తాన్ని, $y = mx + c$ రేఖ A, B ల వద్ద ఖండించుకుంటూ $AB = 2\lambda$ అయితే $c^2 = (1 + m^2)(a^2 - \lambda^2)$ అని చూపండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 = a^2$

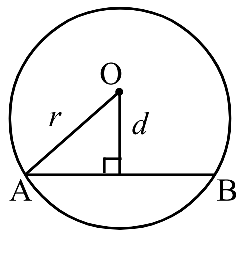
కేంద్రం $O = (0, 0)$

వ్యాసార్థం $= r = a$

జ్యా $\overline{AB}$ సమీకరణం $mx - y + c = 0$ ... (1)

$d =$ కేంద్రం $O = (0, 0)$ నుంచి రేఖ (1) గల లంబదూరం

$= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (సూత్రం $(x_1, y_1) = (0, 0)$)



$= \dfrac{|m(0) - 0 + c|}{\sqrt{m^2+1}}$

$= \dfrac{|c|}{\sqrt{m^2+1}}$

$\therefore$ జా $\overline{AB}$ పొడవు $2\sqrt{r^2-d^2} = 2\lambda$ (దత్తాంశం)

$\Rightarrow \quad \sqrt{r^2-d^2} = \lambda$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$r^2 - d^2 = \lambda^2$

$$\Rightarrow \quad a^2 - \frac{c^2}{(m^2+1)} = \lambda^2$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{-c^2}{m^2+1} = \lambda^2 - a^2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{-c^2}{m^2+1} = -\left(a^2 - \lambda^2\right)$

$\Rightarrow \quad c^2 = (m^2 + 1)\,(a^2 - \lambda^2)$ కావలసిన సమీకరణం.

32. $(-2, 3)$ కేంద్రంగా ఉంటూ $3x + 4y + 4 = 0$ రేఖపై చేసే జ్యా పొడవు 2 అయ్యే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్తం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము. ... (1)

దీని కేంద్రం $(-g, -f) = (-2, 3)$ (దత్తాంశం)

$\Rightarrow \quad -g = -2, -f = 3$

$\Rightarrow \quad \boxed{g = 2}, \boxed{f = -3}$

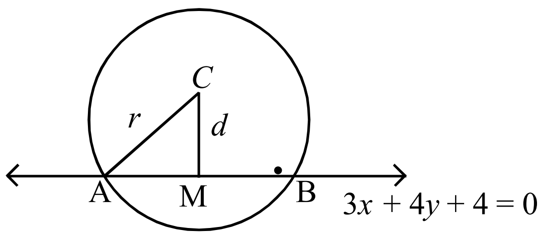
జ్యా $\overline{\text{AB}}$ సమీకరణం $3x + 4y + 4 = 0$ ... (2)

$\therefore \quad$ d = కేంద్రం $(-2, 3)$ నుంచి జ్యా (2) కు గల లంబదూరం

$= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (సూత్రం) $\quad (x_1, y_1) = (-2, 3)$

$= \dfrac{|3(-2)+4(3)+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$= \dfrac{10}{5} = 2$



$\therefore \quad$ AB జ్యా పొడవు 2. (దత్తాంశం)

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{r^2 - d^2} = 1$

$\Rightarrow \quad r^2 - d^2 = 1$

$\Rightarrow \quad r^2 = 1 + d^2$

$\Rightarrow \quad g^2 + f^2 - c = 1 + 2^2 \qquad \because \; d = 2$

$\Rightarrow \quad (2)^2 + (-3)^2 - c = 5$

$\Rightarrow \quad \boxed{c = 8}$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0.$

33. (2, 3) కేంద్రంగా ఉంటూ $3x - 4y + 1 = 0$ రేఖను స్పృశించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: వృత్త కేంద్రం $(a, b) = (2, 3)$

వృత్తం $3x - 4y + 1 = 0$ రేఖని స్పృశిస్తుంది కనక

$3x - 4y + 1 = 0$ రేఖ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది. ... (1)

$\Rightarrow$ వ్యాసార్థం $= d =$ కేంద్రం (2, 3) నుండి స్పర్శరేఖ (1) కి గల లంబదూరం

$= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (సూత్రం) ఇక్కడ $(x_1, y_1) = (2, 3)$

$$= \frac{|3(2) - 4(3) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

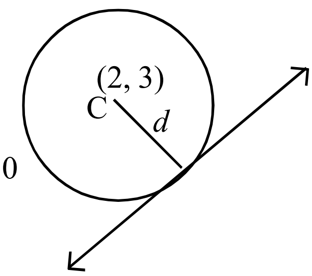
$$= \frac{|-5|}{5} = 1$$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Rightarrow$ $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$



34. $(-3, 4)$ కేంద్రంగా ఉంటూ y-అక్షాన్ని స్పృశించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము.

కేంద్రం $= (-g, -f) = (-3, 4)$ దత్తాంశం

$\Rightarrow$ $-g = -3, -f = 4$

$\Rightarrow$ $\boxed{g = 3}$, $\boxed{f = -4}$

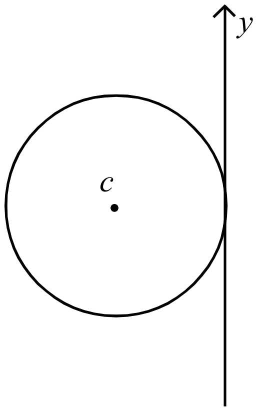
వృత్తం y-అక్షాన్ని స్పృశిస్తుంది కనక, $f^2 = c$ (నియమం)

$\Rightarrow$ $c = f^2 = (-4)^2 = 16$

$\Rightarrow$ $\boxed{c = 16}$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2(3)x + 2(-4)y + 16 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$

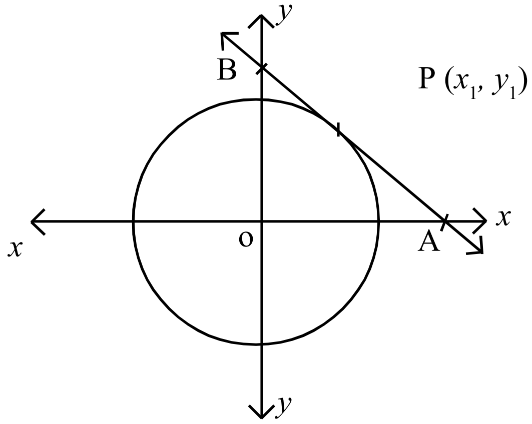


35. $x_1 y_1 \neq 0$ అయి $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తంపై వున్న బిందువు $P(x_1, y_1)$ వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ, నిరూపకాక్షాలతో ఏర్పరిచే త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: వృత్తం, $S = x^2 + y^2 - a^2 = 0$

$S = 0$, వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$S_1 = 0$



$\Rightarrow \quad x x_1 + y y_1 - a^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x x_1 + y y_1 = a^2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x x_1}{a^2} + \dfrac{y y_1}{a^2} = 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{\frac{a^2}{x_1}} + \dfrac{y}{\frac{a^2}{y_1}} = 1$

$\Rightarrow$ స్పర్శరేఖ x-అక్షాన్ని $A\left(\dfrac{a^2}{x_1}, 0\right)$ వద్ద మరియు y-అక్షాన్ని $B\left(0, \dfrac{a^2}{y_1}\right)$ వద్ద ఖండిస్తుంది

(లేదా) x-అంతరఖండం $\dfrac{a^2}{x_1}$ మరియు y-అంతరఖండం $\dfrac{a^2}{y_1}$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ, నిరూపకాక్షాలతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం = Δ OAB వైశాల్యం

$= \dfrac{1}{2}$ |(x-అంతరఖండం) × (y - అంతరఖండం)|

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{a^2}{x_1} \times \frac{a^2}{y_1}\right|$$

$= \dfrac{a^4}{2|x_1 y_1|}$ చ.యూనిట్లు.

36. $x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$ వృత్తానికి $(3, -4)$ వద్ద గీసిన అభిలంబరేఖ, అక్షాలతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$ ను

ప్రామాణిక సమీకరణంతో పోల్చగా

$2g = -22, \quad 2f = -4$

$\Rightarrow \quad g = -11, \quad f = -2$

$\Rightarrow$ కేంద్రం $C = (-g, -f) = (11, 2)$

వృత్తంపై బిందువు $P = (3, -4)$

$\therefore$ అభిలంబరేఖ సమీకరణం CP సమీకరణమవుతుంది.

$\Rightarrow \quad y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ఇక్కడ $(x_1, y_1) = C$ & $(x_2, y_2) = P = (3, -4)$

$\Rightarrow \quad y - 2 = \dfrac{-4-2}{3-11}(x - 11)$

$\Rightarrow \quad y - 2 = \dfrac{-6}{-8}(x - 11)$

$\Rightarrow \quad 3x - 4y = 25$ ... (1)

$\Rightarrow \quad \dfrac{3x}{25} - \dfrac{4y}{25} = 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{\frac{25}{3}} + \dfrac{y}{\frac{25}{-4}} = 1$

$\Rightarrow$ x-అంతరఖండం $\dfrac{25}{3}$, y-అంతరఖండం $\dfrac{-25}{4}$

నిరూపకాక్షాలతో అభిలంబరేఖ (1) ఏర్పరిచే త్రిభుజ వైశాల్యం

$= \dfrac{1}{2}$|(x-అంతరఖండం) × (y-అంతరఖండం)|

$= \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{25}{3} \times \dfrac{25}{-4}\right| = \dfrac{625}{24}$ చ.యూనిట్లు.

37. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ వృత్తానికి $(3, 2)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి. ఇంకా ఈ అభిలంబరేఖ వృత్తాన్ని ఖండించే మరో బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$

ప్రామాణిక సమీకరణంతో పోల్చగా

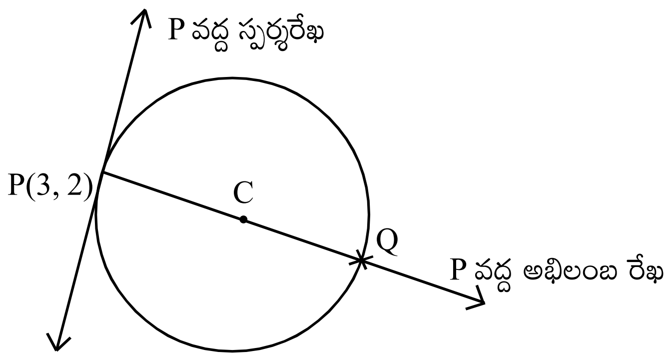
$2g = -4, \qquad 2f = -6$

$\Rightarrow \quad g = -2, \qquad f = -3$

$\Rightarrow$ కేంద్రం $C = (-g, -f) = (2, 3)$

వృత్తంపై బిందువు P(3, 2).

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CP}$ సమీకరణం, P వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం.



$$\Rightarrow \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ఇక్కడ $(x_1, y_1) = (2, 3)$ & $P = (x_2, y_2) = (3, 2)$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = \frac{2-3}{3-2}(x-2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = -(x-2)$$

$$\Rightarrow \quad x + y - 5 = 0$$

అభిలంబరేఖ వృత్తాన్ని ఖండించే మరో బిందువును Q (x_2, y_2) అనుకొనుము. అపుడు 'C', $\overline{PQ}$ మధ్య బిందువు అవుతుంది. ఎందుకంటే అభిలంబరేఖ ఎపుడూ వృత్తకేంద్రం C గుండా పోతుంది.

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3+x_2}{2}, \frac{2+y_2}{2}\right) = (2, 3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3+x_2}{2} = 2, \quad \frac{2+y_2}{2} = 3$$

$\Rightarrow \quad 3 + x_2 = 4, \quad 2 + y_2 = 6$

$\Rightarrow \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 4$

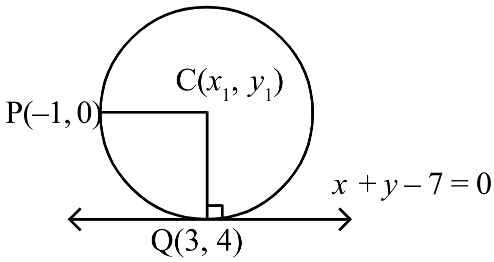
$\therefore$ వృత్తాన్ని అభిలంబరేఖ ఖండించే మరొక బిందువు $(x_2, y_2) = (1, 4)$

38. $(-1, 0)$ గుండా పోతూ $x + y - 7 = 0$ రేఖను $(3, 4)$ వద్ద స్పృశించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్తం, $x + y - 7 = 0$ రేఖను Q(3, 4) వద్ద స్పృశిస్తుంది,

P(–1, 0) గుండా పోతుంది అనుకొందాం. ... (1)

వృత్త కేంద్రం $C = (x_1, y_1)$ అనుకొనుము.



అపుడు CP = CQ = వృత్త వ్యాసార్ధం

$\Rightarrow \quad (CP)^2 = (CQ)^2$

$\Rightarrow \quad (x_1 + 1)^2 + (y_1 - 0)^2 = (x_1 - 3)^2 + (y_1 - 4)^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 + 1 + 2x_1 + y_1^2 = x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2 - 8y_1 + 16$

$\Rightarrow \quad 8x_1 + 8y_1 = 24$

$\Rightarrow \quad 8(x_1 + y_1) = 24$

$\Rightarrow \quad x_1 + y_1 = 3$ ... (2)

ఇపుడు CQ, స్పర్శరేఖ (1) కి లంబంగా వుంటుంది.

$\Rightarrow$ (CQ వాలు) × (స్పర్శరేఖ (1) వాలు) = –1

$$\Rightarrow \quad \frac{y_1 - 4}{x_1 - 3} \times (-1) = -1$$

$\Rightarrow \quad y_1 - 4 = x_1 - 3$

$\Rightarrow \quad x_1 - y_1 = -1$ ... (3)

(2), (3) లను సాధించగా

$$x_1 + y_1 = 3$$
$$\underline{x_1 - y_1 = -1}$$
$$2x_1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 1, \quad y_1 = 2$$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $(x_1, y_1) = (1, 2)$

వ్యాసార్థం = CP దూరం లేదా CQ దూరం

$$= \sqrt{(1+1)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

$\Rightarrow$ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

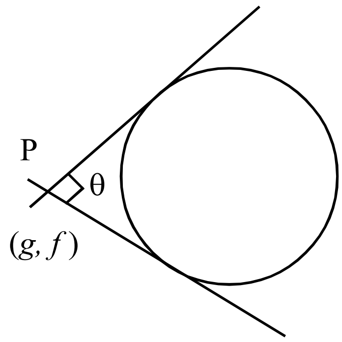
39. $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తానికి బాహ్యబిందువు (g, f) నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖలు లంబంగా వుండటానికి నియమం కనుక్కోండి.

సాధన: $P(x_1, y_1)$ నుంచి $S = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం θ అయితే, $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$

r = వృత్త వ్యాసార్థం.

స్పర్శరేఖలు లంబంగా వుంటే $\theta = 90^\circ$

దత్తాంశం $P(x_1, y_1) = (g, f)$



$$\text{Tan}\left(\frac{90}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$$

$\Rightarrow$ $\text{Tan } 45^\circ = \frac{r}{\sqrt{S_{11}}} \quad \Rightarrow 1 = \frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{S_{11}} = r$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$S_{11} = r^2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 + 2g\,x_1 + 2fy_1 + c = g^2 + f^2 - c$

$\Rightarrow \quad g^2 + f^2 + 2g\,(g) + 2f\,(f) + c = g^2 + f^2 - c$

$\Rightarrow \quad 2g^2 + 2f^2 + 2c = 0$

$\Rightarrow \quad 2\,(g^2 + f^2 + c) = 0$

$\Rightarrow \quad g^2 + f^2 + c = 0$ ఇది కావలసిన నియమం.

40. $x^2 + y^2 - 5x + 4y - 2 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(2, 5)$ స్పర్శ జ్యా సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $P = (x_1, y_1) = (2, 5)$ అనుకొనుము.

వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 5x + 4y - 2 = 0$

$S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P స్పర్శ జ్యా సమీకరణం $S_1 = 0$

$\Rightarrow \quad x\,x_1 + y\,y_1 + g(x + x_1) + f\,(y + y_1) + c = 0$

$\Rightarrow \quad x(2) + y(5) - \frac{5}{2}(x+2) + 2(y+5) - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x + 5y - \frac{5x}{2} - 5 + 2y + 10 - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x + 7y - \frac{5x}{2} + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 14y - 6 = 0$

41. $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 96 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(2, 3)$ యొక్క ధ్రువరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $P = (x_1, y_1) = (2, 3)$ అనుకొనుము.

వృత్తం $S = x^2 + y^2 + 6x + 8y - 96 = 0$

$S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P = (x_1, y_1)$ స్పర్శ జ్యా సమీకరణం $S_1 = 0$

$\Rightarrow$ P(2, 3) ధ్రువరేఖ

$x\,x_1 + y\,y_1 + g(x + x_1) + f\,(y + y_1) + c = 0$

$\Rightarrow \quad x(2) + y(3) + 3(x + 2) + 4(y + 3) - 96 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x + 3y + 3x + 6 + 4y + 12 - 96 = 0$

$\Rightarrow \quad 5x + 7y - 78 = 0$

42. $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 1 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా (4, 2), (3, –5) లు సంయుగ్మ బిందువులని చూపండి.

సాధన: $P = (x_1, y_1) = (4, 2)$, $Q = (x_2, y_2) = (3, -5)$ అనుకొనుము.

వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 3x - 5y + 1 = 0$

ఇప్పుడు $S_{12} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c$

$$= 4(3) + 2(-5) - \frac{3}{2}(4+3) - \frac{5}{2}(2-5) + 1$$

$$= 12 - 10 - \frac{21}{2} + \frac{15}{2} + 1$$

$$= 3 - \frac{21}{2} + \frac{15}{2} = \frac{6-21+15}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$S_{12} = 0$ కనక P, Q లు సంయుగ్మ బిందువులు.

43. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ వృత్తానికి $x + y + 2 = 0$ ఒక ధ్రువరేఖ అయితే దాని ధ్రువాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా ... (1)

$x + y + 2 = 0$ సరళరేఖ ధ్రువం కనుక్కోవాలి. ... (2)

(2) ను $lx + my + n = 0$ తో పోల్చగా

$l = 1, m = 1, n = 2$

ఎందుకంటే (2), $1.x + 1.y + 2 = 0$

(1) ను ప్రామాణిక సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$2g = -4, \quad 2f = 6, \quad c = -12$

$\Rightarrow \quad g = -2, \quad f = 3, \quad c = -12$

వ్యాసార్ధం $= r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+9+12} = 5$

$\therefore$ $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $lx + my + n = 0$ సరళరేఖ ధ్రువం

$$= \left(-g + \frac{lr^2}{lg + mf - n}, -f + \frac{mr^2}{lg + mf - n}\right)$$

$\therefore$ (2) యొక్క ధ్రువం $= \left(2 + \frac{1\times 25}{1(-2)+1(3)-2}, -3 + \frac{1\times 25}{1(-2)+1(3)-2}\right)$

$$= \left(2 + \frac{25}{-1}, -3 + \frac{25}{-1}\right)$$

$= (2 - 25, -3 - 25)$

$= (-23, -28)$

44. $x^2 + y^2 = 17$ వృత్తం దృష్ట్యా $(4, k)$, $(2, 3)$ లు సంయుగ్మాలు అయితే k విలువ ఎంత?

సాధన: $P = (x_1, y_1) = (4, k)$, $Q = (x_2, y_2) = (2, 3)$ అనుకొనుము.

దత్త వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 17 = 0$

దత్తాంశము ప్రకారం P, Q లు సంయుగ్మ బిందువులు.

$\Rightarrow \quad S_{12} = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 - 17 = 0$

$\Rightarrow \quad 4(2) + k(3) - 17 = 0$

$\Rightarrow \quad 8 + 3k - 17 = 0$

$\Rightarrow \quad 3k = 9$

$\Rightarrow \quad \boxed{k = 3}$

45. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $2x + 3y + 11 = 0$, $2x - 2y - 1 = 0$ రేఖలు సంయుగ్మ రేఖలు అని చూపండి.

సాధన: దత్త రేఖలు $2x + 3y + 11 = 0$ ... (1)

$2x - 2y - 1 = 0$ ... (2)

$l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ రేఖలతో పోల్చగా

$l_1 = 2 \qquad l_2 = 2$

$m_1 = 3 \qquad m_2 = -2$

$n_1 = 11 \qquad n_2 = -1$

వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$ ను ... (3)

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ప్రామాణిక సమీకరణంతో పోల్చగా

$2g = 4, \qquad \Rightarrow g = 2$

$2f = 6 \qquad \Rightarrow f = 3$

$c = 12$

వృత్తం (3) దృష్ట్యా (1) & (2) లు సంయుగ్మ రేఖలు కావడానికి నియమం

$r^2(l_1 l_2 + m_1 m_2) = (l_1\ g + m_1 f - n_1) \times (l_2 g + m_2 f - n_2)$ ... (I)

కాబట్టి,

LHS $= r^2(l_1 l_2 + m_1 m_2) = (g^2 + f^2 - c)(l_1 l_2 + m_1 m_2)$

$= (4 + 9 - 12)(2(2) + 3(-2))$

$= (+1)(4 - 6) = -2$

RHS $= (l_1\ g + m_1 f - n_1) \times (l_2 g + m_2 f - n_2)$

$= [2(2) + 3(3) - 11] \times [2(2) + (-2)(3) + 1]$

$= (4 + 9 - 11) \times (4 - 6 + 1)$

$= (2)(-1) = -2$

LHS = RHS.

నియమం (I) నిజం అయింది, కాబట్టి (1), (2) లు వృత్తం (3) దృష్ట్యా సంయుగ్మ రేఖలు.

రెండవ పద్ధతి

దత్త రేఖలు $2x + 3y + 11 = 0$ ... (1)

$2x - 2y - 1 = 0$ ... (2)

వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$ ... (3)

(1) యొక్క ధ్రువం $P(x_1, y_1)$ అనుకొనుము. $2g = 4 \Rightarrow g = 2$

P ధ్రువ రేఖ $S_1 = 0$ $2f = 6 \Rightarrow f = 3$

$\Rightarrow\quad x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

$\Rightarrow\quad (x_1 + g)x + (y_1 + f)y + (gx_1 + f y_1 + c) = 0$

$\Rightarrow\quad (x_1 + 2)x + (y_1 + 3)y + (2x_1 + 3y_1 + 12) = 0$ ... (4)

ఇపుడు,

(1), (4) లు ఒకే రేఖని సూచిస్తాయి.

$\Rightarrow$ అనురూప మూలకాలు అనుపాతంలో వుంటాయి.

$$\Rightarrow\quad \frac{x_1 + 2}{2} = \frac{y_1 + 3}{3} = \frac{2x_1 + 3y_1 + 12}{11} = k \text{ (అనుకొనుము)}$$

$\Rightarrow \quad \frac{x_1+2}{2}=k,\ \frac{y_1+3}{3}=k,\ \frac{2x_1+3y_1+12}{11}=k.$

$\Rightarrow \quad x_1 = 2k-2,\ y_1 = 3k-3$

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 3y_1 + 12 = 11k.$

$\Rightarrow \quad 2(2k-2) + 3(3k-3) + 12 = 11k$

$\Rightarrow \quad 4k - 4 + 9k - 9 + 12 - 11k = 0$

$\Rightarrow \quad 2k - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad x_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 1 - 2 = -1,\ y_1 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ (1), ధ్రువం $P(x_1, y_1) = \left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

P ని సమీకరణం (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2(-1) - 2\left(\frac{-3}{2}\right) - 1$$

$= -2 + 3 - 1 = -3 + 3 = 0$

$\Rightarrow$ P సమీకరణం (2) ని తృప్తిపరుస్తుంది. $\Rightarrow$ రేఖ (2) పై P వుంటుంది.

$\Rightarrow$ ధ్రువం (1), రేఖ (2) పై వుంటుంది.

$\Rightarrow$ వృత్తం (3) దృష్ట్యా, రేఖలు (1), (2) లు సంయుగ్మ రేఖలు. కాబట్టి నిరూపితమైనది.

46. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $kx + 3y - 1 = 0$, $2x + y + 5 = 0$ లు సంయుగ్మ రేఖలు అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $kx + 3y - 1 = 0 \quad \ldots (1)$

$2x + y + 5 = 0$ రేఖలు $\quad \ldots (2)$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా సంయుగ్మ రేఖలు.

ఈ రేఖల వృత్త సమీకరణాలను $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$,

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ లతో పోల్చగా

$l_1 = k,$ $l_2 = 2,$ $2g = -2,$ $\Rightarrow g = -1,$

$m_1 = 3,$ $m_2 = 1,$ $2f = -4,$ $\Rightarrow f = -2,$

$n_1 = -1,$ $n_2 = 5,$ $c = -4,$ $\Rightarrow c = -4.$

(1), (2) లు సంయుగ్మాలు కనక

$r^2 (l_1 l_2 + m_1 m_2) = (l_1 g + m_1 f - n_1)(l_2 g + m_2 f - n_2)$ ని తృప్తి పరుస్తాయి.

$\Rightarrow (g^2 + f^2 - c)(k(2) + 3(1)) = [k(-1) + 3(-2) + 1][2(-1) + 1(-2) - 5]$

$\Rightarrow (1 + 4 + 4)(2k + 3) = [-k - 6 + 1][-2 - 2 - 5]$

$\Rightarrow 9(2k + 3) = (-k - 5)(-9)$

$\Rightarrow 9(2k + 3) = (k + 5)(9)$

$\Rightarrow 2k + 3 = k + 5$

$\Rightarrow \boxed{k = 2}$ Ans

రెండవ పద్ధతి

దత్తాంశం ప్రకారం $kx + 3y - 1 = 0$ .... (1)

$2x + y + 5 = 0$ రేఖలు .... (2)

వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ దృష్ట్యా సంయుగ్మరేఖలు. .... (3)

రేఖ (2) ధ్రువం $P(x_1\, y_1)$ అయితే

P ధ్రువరేఖ $S_1 = 0$

$\Rightarrow xx_1 + yy_1 - (x + x_1) - 2(y + y_1) - 4 = 0$

$\Rightarrow (x_1 - 1)x + (y_1 - 2)y - x_1 - 2y_1 - 4 = 0$ .... (4)

ఇపుడు

(2), (4) ఒకే రేఖను సూచిస్తాయి.

$\Rightarrow$ అనురూప గుణకాలు అనుపాతంలో వుంటాయి.

$\Rightarrow \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{y_1 - 2}{1} = \frac{-x_1 - 2y_1 - 4}{5} = m$ (అనుకొనుము)

$\Rightarrow \frac{x_1 - 1}{2} = m\,;\ \frac{y_1 - 2}{1} = m,\ \frac{-x_1 - 2y_1 - 4}{5} = m$

$\Rightarrow\ x_1 = 2m+1,\ y_1 = m + 2,\ -x_1 - 2y_1 - 4 = 5m$

$$\Rightarrow\ -(2m + 1) - 2\,(m + 2) - 4 = 5m$$

$$\Rightarrow -2m - 1 - 2m - 4 - 4 - 5m = 0$$

$$\Rightarrow -9 - 9m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

$\therefore\ x_1 = 2m + 1 = 2(-1) + 1 = -1$

$y_1 = m + 2 = -1 + 2 = 1$

$\therefore$ రేఖ (2) ధృవం $P\,(x_1, y_1) = (-1, 1)$

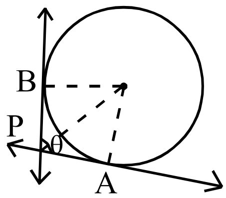
(1) & (2) లు సంయుగ్మ రేఖలు కనక (2) ధృవం (1) పై వుంటుంది.

$\Rightarrow$ (1) పై P వుంది . $\therefore$ P ని (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$k\,(-1) + 3\,(1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -k + 3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 2}.$$

47. (3, 2) నుంచి $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 2 = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం కనుక్కోండి.



సాధన: $P = (x_1, y_1) = (3, 2)$, వృత్తం $S = x^3 + y^2 - 6x + 4y - 2 = 0$ అనుకొనుము. $S = 0$ వృత్తానికి $P\,(x_1\ y_1)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం 'θ' అయితే

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - c}}{\sqrt{S_{11}}}$$

$$= \frac{\sqrt{9+4+2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 - 6(3) + 4(2) - 2}}$$

ఎందుకంటే, $S_{11} = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

$$\therefore \quad \mathrm{Tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{1}} = \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{15})$$

$\Rightarrow \theta = 2\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{15})$ ఇది స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం.

(లేదా) $\mathrm{Tan}\frac{\theta}{2} = \sqrt{15}$

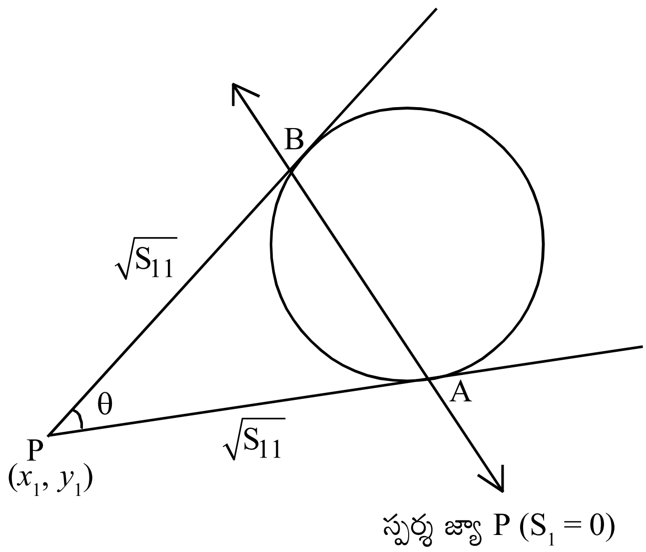
$$\Rightarrow \cos\theta = \left|\frac{1-\mathrm{Tan}^2 \theta/2}{1+\mathrm{Tan}^2 \theta/2}\right| = \left|\frac{1-15}{1+15}\right| = \left|\frac{-14}{16}\right| = \frac{+7}{8}$$

$$\Rightarrow \theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{7}{8}\right).$$

48. $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తానికి బాహ్యబిందువు అయిన $P(x_1, y_1)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖలు, వీటి స్పర్శ జ్యా తో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం $\dfrac{r(S_{11})^{3/2}}{S_{11}+r^2}$ ('r వృత్త వ్యాసార్థం) అని చూపండి.

సాధన: వృత్తం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

వృత్తం $S = 0$ కు బాహ్యబిందువు $P(x_1, y_1)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖల స్పర్శబిందువులు A, B అనుకొనుము.



PA = PB

= P నుండి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు

$= \sqrt{S_{11}}$

అపుడు $\overleftrightarrow{AB}$, $S_1 = 0$ సమీకరణంగా గల స్పర్శ జ్యా

ఇపుడు, P నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం θ

అంటే $\angle BPA = \theta$ అయితే

అపుడు, $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$

$$\Rightarrow \quad \text{Sin}\,\theta = \frac{2\,\text{Tan}(\theta/2)}{1+\text{Tan}^2(\theta/2)} = \frac{2\times\frac{r}{\sqrt{S_{11}}}}{1+\frac{r^2}{S_{11}}}$$

$$= \frac{2r}{\sqrt{S_{11}}} \times \frac{S_{11}}{S_{11}+r^2}$$

ఇపుడు, కావలసిన త్రిభుజ వైశాల్యం = Δ PAB వైశాల్యం

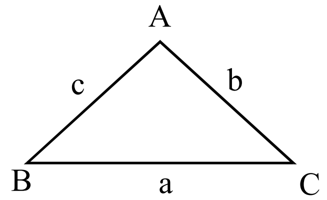
$$= \frac{1}{2}(PA)(PB).\text{Sin}\,\theta$$

$$= \frac{1}{2}\times\sqrt{S_{11}}\times\sqrt{S_{11}}\times\frac{2r.S_{11}}{\sqrt{S_{11}}\left(S_{11}+r^2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{S_{11}}\cdot r\cdot S_{11}}{S_{11}+r^2}$$

$$= \frac{r\left(S_{11}\right)^{3/2}}{S_{11}+r^2}$$ కనక నిరూపితమైనది.

త్రిభుజ ధర్మాల నుంచి



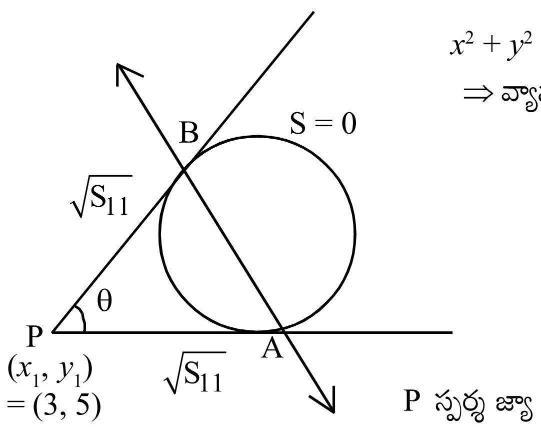
Δ ABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2} ab$ sinC

$= \frac{1}{2}$ (BC) (AC) Sin C

BC, AC భుజాల మధ్య కోణం C

49. P(3, 5) బిందువు నుండి $x^2 + y^2 - 16 = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు గీసారు. P స్పర్శ జ్యా తోనూ, ఈ స్పర్శరేఖల తోనూ ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన:



$x^2 + y^2 = 16 = 4^2$

$\Rightarrow$ వ్యాసార్థం = 4

వృత్తం సమీకరణం $S = x^2 + y^2 - 16 = 0$.

$\Rightarrow$ వ్యాసార్థం $= 4$

$P = (x_1, y_1) = (3, 5)$, బాహ్య బిందువు నుంచి వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల స్పర్శ బిందువులు A, B లనుకుందాం.

అపుడు PA = PB = P నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు $= \sqrt{S_{11}}$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 16}$$

$$= \sqrt{3^2 + 5^2 - 16}$$

$$= \sqrt{18}$$

$$= \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

ΔPAB వైశాల్యం $= \frac{1}{2}(PA)(PB)\sin\theta$,

θ, స్పర్శరేఖలు PA, PB ల మధ్యకోణం

$$= \frac{1}{2}\sqrt{S_{11}} \cdot \sqrt{S_{11}} \cdot \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \mathrm{Tan}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{2 \times \frac{4}{3\sqrt{2}}}{1 + \frac{16}{18}}$$

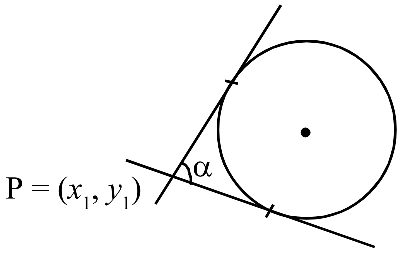
$$= 3 \times 3 \times 2 \times \frac{4}{3\sqrt{2}} \times \frac{18}{18 + 16}$$

$$= \frac{3 \times 2 \times 4 \times 18}{\sqrt{2} \times (34)}$$

$$= \frac{3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 4 \times 18}{\sqrt{2} \times 2 \times 17}$$

$$= \frac{108\sqrt{2}}{17}$$ చ. యూనిట్లు

50. బిందువు P నుంచి $x^2+y^2=a^2$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం α. అయితే, P బిందుపథం కనుక్కోండి.



సాధన: బిందువు $P=(x_1, y_1)$, వృత్తం $S = x^2+y^2-a^2=0$ అనుకొనుము.

దత్తాంశం ప్రకారం $P(x_1, y_1)$ నుంచి $S=0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం 'α'.

$$\Rightarrow \text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$$

$$\Rightarrow \text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a}{\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}}$$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా,

$$\text{Tan}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a^2}{\left(x_1^2+y_1^2-a^2\right)}$$

$$\Rightarrow \left(x_1^2+y_1^2-a^2\right)\left(\text{Tan}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=a^2$$

$$\Rightarrow x_1^2+y_1^2-a^2=\frac{a^2}{\text{Tan}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=a^2\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x_1^2+y_1^2-a^2=a^2\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x_1^2+y_1^2=a^2\left(1+\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=a^2\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ బిందుపథం $x^2+y^2=a^2\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

51. $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తం దృష్ట్యా బిందువు P స్పర్శ జ్యా వృత్తాన్ని A, B ల వద్ద ఖండిస్తూ $\angle AOB = 90^\circ$ అయ్యే P బిందువులు $x^2 + y^2 = 2a^2$ వృత్తంపై ఉంటాయని చూపండి.

సాధన: $P(x_1, y_1)$ నుంచి వృత్తం $S = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ కు

గీసిన స్పర్శరేఖలు వృత్తాన్ని ఖండించే బిందువులు A, B అనుకొనుము. .... (1)

వృత్త కేంద్రం $O = (0, 0)$

ఇపుడు $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P యొక్క స్పర్శ జ్యా $S_1 = 0$

$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0.$ ... (2)

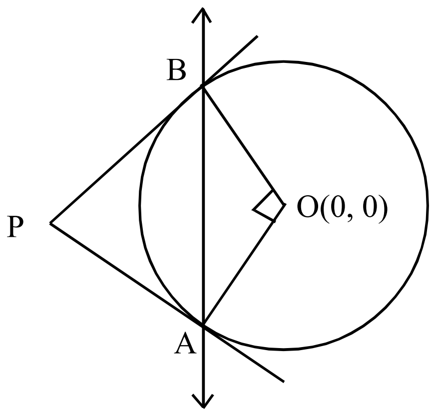
$\Rightarrow xx_1 + yy_1 = a^2$

$\Rightarrow \dfrac{xx_1 + yy_1}{a^2} = 1$

(2) తో (1) ని సమఘాతీకరిస్తే $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ ల సంయుక్త సమీకరణం రాబట్టవచ్చు.

$\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ ల సంయుక్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 - a^2 (1)^2 = 0.$



$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - a^2 \left(\dfrac{xx_1 + yy_1}{a^2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \cancel{a^2} \dfrac{\left(x^2x_1^2 + y^2y_1^2 + 2x_1y_1xy\right)}{\cancel{a^2} \times a^2} = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a^2\left(x^2 + y^2\right) - x^2 x_1^2 - y^2 y_1^2 - 2x_1 y_1 xy}{a^2} = 0$

$\Rightarrow \quad a^2x^2 + a^2y^2 - x^2x_1^2 - y^2y_1^2 - 2x_1 y_1 xy = 0$

$\Rightarrow \quad (a^2 - x_1^2)x^2 + (a^2 - y_1^2)y^2 - 2x_1 y_1 xy = 0$ ... (3)

ఇపుడు $\lfloor AOB = 90^\circ \Rightarrow$ (3) సూచించే సరళరేఖాయుగ్మం మధ్యకోణం 90°.

$\Rightarrow \quad x^2$ గుణకం $+ y^2$ గుణకం $= 0$ (నియమం)

$\Rightarrow \quad a^2 - x_1^2 + a^2 - y_1^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = 2a^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2a^2$ పై $P(x_1, y_1)$ బిందువు వుంటుంది. అందువల్ల నిరూపితమైంది.

52. $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తం స్పర్శరేఖలు $(x + a)^2 + y^2 = 2a^2$ దృష్ట్యా ధ్రువరేఖలు. అయితే వీటి ధ్రువాలు $y^2 + 4ax = 0$ పై వుంటాయని చూపండి.

సాధన: $(x + a)^2 + y^2 = 2a^2$ వృత్తం దృష్ట్యా స్పర్శరేఖ ధ్రువం P (x_1, y_1) అనుకొనుము.

$\Rightarrow$ $S = x^2 + y^2 + 2ax - a^2 = 0$

P కి ధ్రువరేఖ $S_1 = 0$

$\Rightarrow$ $xx_1 + yy_1 + a(x + x_1) - a^2 = 0$

$\Rightarrow$ $(x_1 + a)x + yy_1 + (ax_1 - a^2) = 0$ ... (1)

ఈ ధ్రువరేఖ $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుంది.

దత్తాంశం ప్రకారం (1)

$x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ కేంద్రం (0, 0), వ్యాసార్థం = a

$\Rightarrow$ వ్యాసార్థం = (0, 0) కేంద్రం నుంచి (1) కి గల లంబదూరం

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (సూత్రం)

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{\left|(x_1 + a)(0) + (0)y_1 + ax_1 - a^2\right|}{\sqrt{(x_1 + a)^2 + y_1^2}}$

$\Rightarrow$ $a\sqrt{\left(x_1^2 + a^2 + y_1^2 + 2ax_1\right)} = ax_1 - a^2$

$\Rightarrow$ $\cancel{a}\left(\sqrt{x_1^2 + a^2 + y_1^2 + 2ax_1}\right) = \cancel{a}(x_1 - a)$

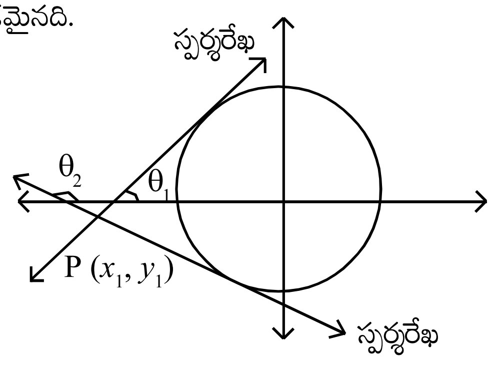
ఇరువైపులా వర్గంచేయగా

$(x_1^2 + a^2 + y_1^2 + 2ax_1) = (x_1 - a)^2$

$\Rightarrow$ $\cancel{x_1^2} + \cancel{a^2} + y_1^2 + 2ax_1 = \cancel{x_1^2} + \cancel{a^2} - 2ax_1$

$\Rightarrow$ $y_1^2 + 4ax_1 = 0$

$P(x_1, y_1)$, $y^2 + 4ax = 0$ పై వుంటుంది. కనక, నిరూపించడమైనది.



53. $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తానికి P గుండా గీసిన స్పర్శరేఖలు, x-అక్షంతో θ_1, θ_2 కోణాలు చేస్తున్నాయి. $\cot\theta_1 + \cot\theta_2 = k$ అయ్యే P బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: P (x_1, y_1) నుంచి $S = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖలు x-అక్షంతో θ_1, θ_2 కోణాలు చేస్తున్నాయి.

వాలు రూపంలో స్పర్శరేఖ సమీకరణం, $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$, m = స్పర్శరేఖ వాలు, వ్యాసార్ధం $r = a$

ఇపుడు, ఇది P (x_1, y_1) గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow \quad y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow \quad y_1 - mx_1 = \pm\, a\sqrt{1+m^2}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1 + m^2)$

$\Rightarrow \quad y_1^{\,2} + m^2 x_1^{\,2} - 2x_1 y_1 m - a^2 - a^2 m^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x_1^{\,2} - a^2)m^2 - (2x_1 y_1)m + y_1^{\,2} - a^2 = 0$

ఇది 'm' లో వర్గ సమీకరణం.

ఈ సమీకరణపు మూలాలు m_1, m_2 అయితే అపుడు P నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖల వాలులు m_1, m_2 అనుకొనుము.

$\Rightarrow \quad m_1 = \tan\theta_1, \qquad m_2 = \tan\theta_2.$

ఇపుడు, మూలాల మొత్తం $= m_1 + m_2 = \dfrac{2x_1 y_1}{x_1^{\,2} - a^2}$

మూలాల లబ్ధం $= m_1.m_2 = \dfrac{y_1^{\,2} - a^2}{x_1^{\,2} - a^2}$

కాని దత్తాంశం ప్రకారం, $\cot\theta_1 + \cot\theta_2 = k$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{Tan}\theta_1} + \frac{1}{\operatorname{Tan}\theta_2} = k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} = k$$

$$\Rightarrow \quad m_1 + m_2 = k\,(m_1 m_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x_1 y_1}{\cancel{x_1^{\,2} - a^2}} = k\left(\frac{y_1^{\,2} - a^2}{\cancel{x_1^{\,2} - a^2}}\right)$$

$\Rightarrow$ $2x_1y_1 = k\,(y_1^2 - a^2)$

$\therefore$ $2xy = k\,(y^2 - a^2)$ ఇది కావలసిన P బిందుపథం.

$\Rightarrow$ $k\,(y^2 - a^2) = 2xy.$

54. $lx + my + n = 0$ రేఖపై ఉన్న బిందువుల నుంచి $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శ జ్యాల మధ్య బిందువుల బిందుపథాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $lx + my + n = 0$ రేఖపై P (x_1, y_1) ఒక బిందువు అనుకొనుము. ... (1)

$\Rightarrow$ $lx_1 + my_1 + n = 0$ ... (2)

$S = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P (x_1, y_1) స్పర్శ జ్యా, $S_1 = 0$

$\Rightarrow$ $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$ ... (3)

ఇపుడు ఈ స్పర్శ జ్యా, జ్యా కూడా అవుతుంది.

జ్యా (3) మధ్య బిందువుల బిందుపథాన్ని కనుక్కోవాలి.

కనక, జ్యా (3) మధ్యబిందువు Q(x_2, y_2) అనుకొనుము.

అపుడు సూత్రం ప్రకారం జ్యా సమీకరణం $S_2 = S_{22}$

$\Rightarrow$ $xx_2 + yy_2 - a^2 = x_2^2 + y_2^2 - a^2$

$\Rightarrow$ $xx_2 + yy_2 - (x_2^2 + y_2^2) = 0$ ... (4)

(3) & (4) ఒకే రేఖను సూచిస్తాయి.

$\Rightarrow$ అనురూప గుణకాలు అనుపాతాలు.

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{\cancel{-}a^2}{\cancel{-}\left(x_2^2 + y_2^2\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{a^2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{a^2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{a^2\,x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y_1 = \frac{a^2\,y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

కాని, (x_1, y_1) (1) పై వుంటుంది.

కనక, (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$l\,\frac{\left(a^2\,x_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{m\left(a^2\,y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} + n = 0$$

$\Rightarrow \quad l(a^2 x_2) + ma^2 y_2 + n(x_2^2 + y_2^2) = 0$

$\therefore$ స్పర్శ జ్యా మధ్యబిందువు బిందుపథం, $Q(x_2, y_2)$ యొక్క బిందుపథం అంటే

$l\, a^2 x + ma^2 y + n(x^2 + y^2) = 0$

$\Rightarrow \quad a^2(lx + my) + n(x^2 + y^2) = 0$ ఇది కావలసిన బిందుపథం.

55. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ వృత్తాలకు అంతర సరూపకేంద్రం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు,

$S = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0,$

$S^1 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$

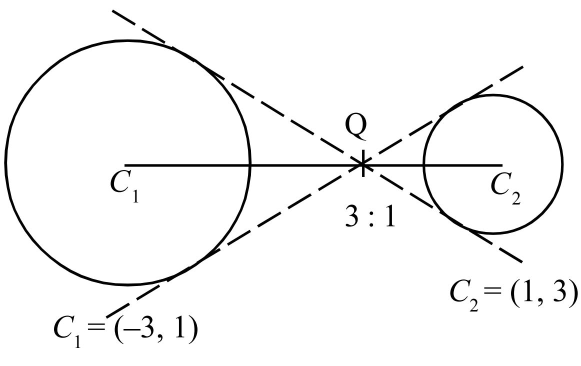
$S = 0$ వృత్తానికి	$S^1 = 0$ వృత్తానికి
కేంద్రం $= C_1 = (-3, 1)$	కేంద్రం $= C_2 = (1, 3)$
వ్యాసార్థం $= r_1 = \sqrt{9+1-1}$	వ్యాసార్థం $= r_2 = \sqrt{1+9-9}$
$= \sqrt{9} = 3$	$= 1.$

దూరం $\overline{C_1C_2} = \sqrt{(1+3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$r_1 + r_2 = 4$

$\Rightarrow \quad C_1C_2 > r_1 + r_2$

$\Rightarrow$ రెండు వృత్తాలు ఖండించుకొనవు.



$\overline{C_1C_2}$ రేఖను సరూప అంతర కేంద్రం $r_1 : r_2 = 3 : 1$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది.

$\Rightarrow$ సరూప అంతర కేంద్రం $= Q$

$$= \left(\frac{m x_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

$$= \left(\frac{3(1)+1(-3)}{3+1}, \frac{3(3)+1(1)}{3+1} \right)$$

$$= \left(0, \frac{10}{4} \right) = \left(0, \frac{5}{2} \right)$$

56. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0, x^2 + y^2 = 4$ వృత్తాల బాహ్య సరూప కేంద్రం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలను,

$$S = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$$

$S^1 = x^2 + y^2 - 4 = 0$ అనుకొనుము.

$S = 0$ వృత్తానికి	$S^1 = 0$ వృత్తానికి
కేంద్రం $= C_1 = (1, 3)$	కేంద్రం $= C_2 = (0, 0)$
వ్యాసార్థం $= r_1 = \sqrt{1+9-9} = 1$	వ్యాసార్థం $= r_2 = \sqrt{4} = 2$

దూరం $\overline{C_1C_2} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$

$r_1 + r_2 = 1 + 2 = 3.$

$\overline{C_1C_2} > r_1 + r_2$

$\therefore$ వృత్తాలు ఖండించుకొనవు.

ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఖండన బిందువు, బాహ్య సరూప కేంద్రం P, $\overline{C_1C_2}$ రేఖను $r_1 : r_2 = 1 : 2$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజిస్తుంది.

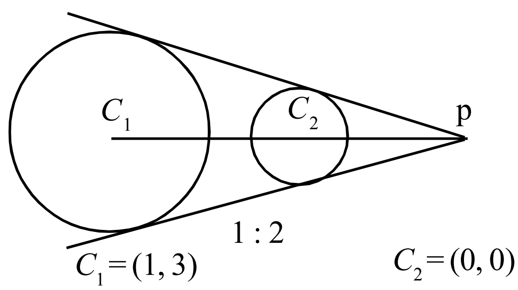
$\therefore$ బాహ్య సరూప కేంద్రం,

$$P = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \right)$$

$$= \left(\frac{1(0)-2(1)}{1-2}, \frac{1(0)-2(3)}{1-2} \right)$$

$$= \left(\frac{-2}{-1}, \frac{-6}{-1} \right)$$

$$= (2, 6)$$



57. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0, x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$ వృత్తాలు స్పృశించుకుంటాయని చూపండి. ఇంకా స్పర్శ బిందువును, స్పర్శబిందువు వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శరేఖను కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలను

$$S = x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

$S^1 = x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$ అనుకొనుము.

$S = 0$ వృత్తానికి	$S^1 = 0$ వృత్తానికి
కేంద్రం $= C_1 = (2, 3)$	కేంద్రం $= C_2 = (-3, -9)$
వ్యాసార్ధం $= r_1 = \sqrt{4+9+12}$	వ్యాసార్ధం $= r_2 = \sqrt{9+81-26}$
$= \sqrt{25}$	$= \sqrt{64}$
$= 5$	$= 8$

దూరం $\overline{C_1C_2} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-9-3)^2}$

$$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$r_1 + r_2 = 5 + 8 = 13 = \overline{C_1C_2}$

$\therefore \quad \overline{C_1C_2} = r_1 + r_2$

$\Rightarrow$ రెండు వృత్తాలు ఒకదానికొకటి బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి.

ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ మూలాక్షం $S - S^1 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 - x^2 - y^2 - 6x - 18y - 26 = 0$

$\Rightarrow \quad -10x - 24y - 38 = 0$

$\Rightarrow \quad -2(5x + 12y + 19) = 0$

$\Rightarrow \quad 5x + 12y + 19 = 0$ ఇది స్పర్శ బిందువు వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శరేఖా సమీకరణం.

రెండు వృత్తాల స్పర్శ బిందువును కనుగొనుట

వృత్తాల స్పర్శబిందువు $P(h, k)$ అనుకొనుము.

అపుడు, $C_1 = (2, 3) = (x_1, y_1)$ నుండి

స్పర్శరేఖ $5x + 12y + 19 = 0$ కు గీసిన లంబానికి లంబపాదం P.

$$\Rightarrow \quad \frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} = \frac{-(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

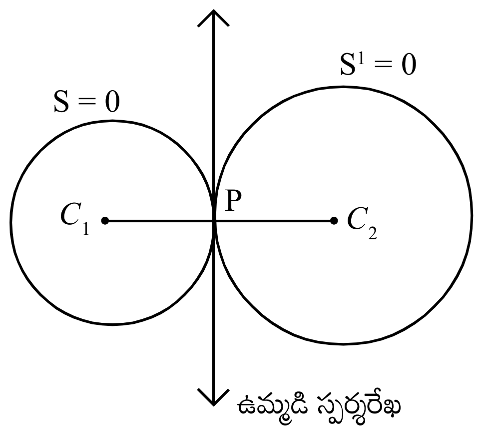
$$\Rightarrow \quad \frac{h-2}{5}=\frac{k-3}{12}=\frac{-(5(2)+12(3)+19)}{5^2+12^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h-2}{5}=\frac{k-3}{12}=\frac{-65}{169}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h-2}{5}=\frac{k-3}{12}=\frac{-5}{13}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h-2}{5}=\frac{-5}{13}, \frac{k-3}{12}=\frac{-5}{13}$$

$$\Rightarrow \quad h-2=\frac{-25}{13}, \quad k-3=\frac{-60}{13}$$



$$h=2-\frac{25}{13} \qquad k=3-\frac{60}{13}$$

$$=\frac{26-25}{13} \qquad =\frac{39-60}{13}$$

$$=\frac{1}{13} \qquad =-\frac{21}{13}$$

$\therefore$ రెండు వృత్తాల స్పర్శబిందువు

$$=(h,k)=\left(\frac{1}{13},\frac{-21}{13}\right)$$

రెండు వృత్తాల స్పర్శబిందువును కనుగొనుటకు రెండవ పద్ధతి

వృత్తాలు ఒకదానికొకటి బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటున్నాయి. కనక

స్పర్శబిందువు, అంతర సరూపకేంద్రం P, $\overline{C_1C_2}$ రేఖను $r_1 : r_2 = 5 : 8$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది.

$\therefore$ వృత్తాల స్పర్శబిందువు

$$=\left(\frac{5(-3)+8(2)}{5+8}, \frac{5(-9)+8(3)}{5+8}\right)$$

$$=\left(\frac{-15+16}{13}, \frac{-45+24}{13}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{13}, \frac{-21}{13}\right)$$

58. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $5(x^2 + y^2) - 8x - 14y - 32 = 0$ వృత్తాలు స్పృశించుకుంటాయని చూపి, స్పర్శబిందువును కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలను

$$S = x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

$$S^1 = x^2 + y^2 - \frac{8}{5}x - \frac{14}{5}y - \frac{32}{5} = 0$$ (ప్రామాణిక రూపం) అనుకొనుము.

$S = 0$ వృత్తానికి

$2g = -4,\ 2f = -6,\ c = -12$

$\Rightarrow \quad g = -2,\ f = -3,\quad c = -12$

$\therefore \quad$ కేంద్రం $= C_1 = (-g, -f) = (2, 3)$

వ్యాసార్థం $= r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{4 + 9 + 12}$

$= 5$

$S^1 = 0$ వృత్తానికి

$2g^1 = \frac{-8}{5},\ 2f^1 = \frac{-14}{5},\ c^1 = \frac{-32}{5}$

$\Rightarrow\ g^1 = \frac{-4}{5},\ f^1 = \frac{-7}{5},\ c^1 = \frac{-32}{5}$

కేంద్రం$= \left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right) = C_2$

వ్యాసార్థం $=$

$r_2 = \sqrt{\left(g^1\right)^2 + \left(f^1\right)^2 - c^1}$

$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{49}{25} + \frac{32}{5}}$

$= \sqrt{\frac{16 + 49 + 160}{25}}$

$= \sqrt{\frac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$

దూరం $\quad C_1C_2 = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{7}{5} - 3\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{-6}{5}\right)^2 + \left(\frac{-8}{5}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{64}{25}}$

$= \sqrt{\frac{36 + 64}{25}}$

$= \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$

$r_1 + r_2 = 5 + 3 = 8$

$r_1 - r_2 = 5 - 3 = 2 = C_1C_2$

$C_1C_2 = |r_1 - r_2|$ కనక, రెండు వృత్తాలు ఒకదానికొకటి అంతరంగా స్పృశించుకుంటాయి.

రెండు వృత్తాల స్పర్శబిందువు, బాహ్య సరూప కేంద్రం P, $\overline{C_1C_2}$ ను $r_1 : r_2 = 5 : 3$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజిస్తుంది.

$\therefore$ $$P = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

$$= \left(\frac{5\left(\frac{4}{5}\right) - 3(2)}{5-3}, \frac{5\left(\frac{7}{5}\right) - 3(3)}{5-3}\right)$$

$$= \left(\frac{4-6}{2}, \frac{7-9}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-2}{2}\right)$$

$= (-1, -1)$

$\therefore$ రెండు వృత్తాల స్పర్శబిందువు $(-1, -1)$.

59. $(1, 3)$ నుంచి $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ గీసిన స్పర్శరేఖా సమీకరణాలు కనుక్కోండి. ఇంకా, వాటి మధ్యకోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $S = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0,$

$P = (x_1, y_1) = (1, 3)$ అనుకొనుము.

$S_{11} = 1^2 + 3^2 - 2(1) + 4(3) - 11 = 1 + 9 - 2 + 12 - 11 = 9 > 0$

$\Rightarrow$ P, వృత్తానికి బాహ్యంగా వుంది.

కనక, స్పర్శరేఖ యుగ్మ సమీకరణం $S_1^2 = S\,(S_{11})$

$\Rightarrow$ $[xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c]^2$

$= [x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11]\,(9)$

$\Rightarrow$ $[x(1) + y(3) - 1\,(x + 1) + 2\,(y + 3) - 11]^2$

$= 9\,[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11]$

$\Rightarrow$ $[x + 3y - x - 1 + 2y + 6 - 11]^2 = 9\,[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11]$

$\Rightarrow$ $(5y - 6)^2 = 9x^2 + 9y^2 - 18x + 36y - 99$

$\Rightarrow \quad 25y^2 - 60\,y + 36 - 9x^2 - 9y^2 + 18x - 36y + 99 = 0$

$\Rightarrow \quad 16y^2 - 9x^2 + 18x - 96y + 135 = 0$

$\Rightarrow \quad -(9x^2 - 16y^2 - 18x + 96y - 135) = 0$

$\Rightarrow \quad 9x^2 - 16y^2 - 18x + 96y - 135 = 0$ స్పర్శరేఖ యుగ్మ సమీకరణం.

వీటి మధ్యకోణం 'θ' అయితే, అపుడు

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{S_{11}}} = \frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{(-1)^2+2^2+11}}{3} = \frac{\sqrt{16}}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 2\,\text{Tan}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

లేదా

$$\cos\theta = \frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

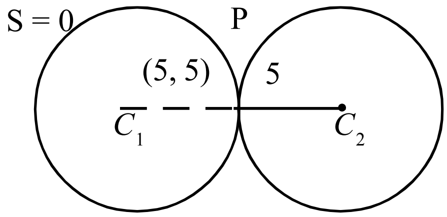
$$= \frac{|9-16|}{\sqrt{(9+16)^2+0}}$$

$$= \frac{7}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$$

60. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ వృత్తాన్ని $(5, 5)$ బిందువు వద్ద బాహ్యంగా స్పృశిస్తూ 5 యూనిట్ల వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ అనుకొనుము.



దీని కేంద్రం $C_1 = (-g\ -f)$

$= (1, 2)$

$2g = -2 \quad \Rightarrow \quad g = -1$

$2f = -4 \quad \Rightarrow \quad f = -2$

$c = -20$

వ్యాసార్థం $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{1+4+20}$

$= \sqrt{25} = 5$

S = 0 వృత్త వ్యాసార్థం 5, కావలసిన వృత్త వ్యాసార్థం కూడా 5.

రెండు వృత్తాలు P = (5, 5) వద్ద బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి.

కనక, కావలసిన వృత్త కేంద్రం $C_2 = (x_1, y_1)$ అనుకొనుము.

అపుడు, సరూప అంతరకేంద్రం, P, $\overline{C_1C_2}$ ను $r_1 : r_2 = 5 : 5 = 1 : 1$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది.

$\Rightarrow$ $\overline{C_1C_2}$ మధ్య బిందువు P

$\Rightarrow \quad (5,5) = \left(\dfrac{1+x_1}{2}, \dfrac{2+y_1}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1+x_1}{2} = 5, \ \dfrac{2+y_1}{2} = 5$

$\Rightarrow \quad x_1 = 10 - 1, \quad y_1 = 10 - 2$

$x_1 = 9, \quad y_1 = 8$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త కేంద్రం $(x_1, y_1) = (9, 8)$, వ్యాసార్థం $r = 5$

కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

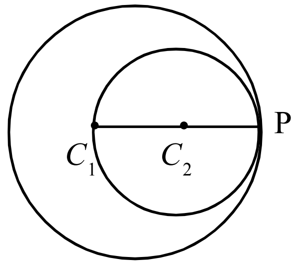
$(x-9)^2 + (y-8) = 5^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 18x + 81 + y^2 - 16y + 64 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 - 18x - 16y + 120 = 0$

61. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ వృత్తాన్ని $(-1, 1)$ వద్ద అంతరంగా స్పృశిస్తూ 2 యూనిట్లు వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం



$S = x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

$2g = -4 \quad \Rightarrow \quad g = -2$

$2f = 6 \quad \Rightarrow \quad f = 3$

$c = -12$

దీని కేంద్రం $C_1 = (-g, -f) = (2, -3)$

వ్యాసార్థం $r_1 = \sqrt{4+9+12} = \sqrt{25} = 5$

$S = 0$ వృత్తాన్ని అంతరంగా స్పృశిస్తూ, వ్యాసార్థం 2 గా కలిగిన వృత్త కేంద్రం $C_2 = (x_1, y_1)$ అనుకొనుము.

రెండు వృత్తాల స్పర్శబిందువు $Q = (-1, 1)$ అనుకొనుము. అపుడు Q, బాహ్య సరూప కేంద్రం,

C_1C_2ను $r_1 : r_2 = 5 : 2$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజిస్తుంది.

$$\therefore \quad Q = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (-1, 1) = \left(\frac{5x_1 - 2(2)}{5-2}, \frac{5y_1 - 2(-3)}{5-2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (-1, 1) = \left(\frac{5x_1 - 4}{3}, \frac{5y_1 + 6}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5x_1 - 4}{3} = -1, \frac{5y_1 + 6}{3} = 1$$

$\Rightarrow \quad 5x_1 - 4 = -3 \qquad 5y_1 + 6 = 3$

$\Rightarrow \quad 5x_1 = -3 + 4 \qquad 5y_1 = 3 - 6$

$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{5} \qquad 5y_1 = -3$

$y_1 = \frac{-3}{5}$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త కేంద్రం $= (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

$\therefore$ వ్యాసార్థం 2 గా గల, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 2^2$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{25} - \frac{2}{5}x + y^2 + \frac{9}{25} + \frac{6}{5}y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y + \frac{1}{25} + \frac{9}{25} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{18}{5} = 0$$

$\Rightarrow$ $5x^2 + 5y^2 - 2x + 6y - 18 = 0$ ఇది కావలసిన వృత్త సమీకరణం.

62. మూలబిందువు నుంచి $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖా యుగ్మ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి. దీని నుంచి ఆ స్పర్శరేఖలు లంబంగా ఉండటానికి నియమాన్ని రాబట్టండి.

సాధన: దత్త వృత్తం, $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము.

$P(0, 0) = (x_1, y_1)$, $S_{11} = 0^2 + 0^2 + 2g(0) + 2f(0) + c = c$ అనుకొనుము.

P నుంచి $S = 0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణం $S_1^2 = SS_{11}$

$\Rightarrow$ $[x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c]^2 = (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(c)$

$\Rightarrow$ $[x(0) + y(0) + gx + fy + c]^2 = (c)(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)$

$\Rightarrow$ $(gx + fy + c)^2 = cx^2 + cy^2 + 2gcx + 2fcy + c^2$

$\Rightarrow$ $g^2x^2 + f^2y^2 + c^2 + 2gfxy + 2fcy + 2gcx - cx^2 - cy^2 - 2gcx - 2fcy - c^2 = 0$

$\Rightarrow$ $(g^2 - c)x^2 + (f^2 - c)y^2 + 2gfxy = 0$

లేదా $(gx + fy)^2 = c(x^2 + y^2)$

ఇపుడు, ఈ స్పర్శరేఖాయుగ్మం (సరళరేఖాయుగ్మం) ఒకదానికొకటి లంబంగా వుంటే

x^2 గుణకం $+ y^2$ గుణకం $= 0$

$\Rightarrow$ $(g^2 - c) + (f^2 - c) = 0$

$\Rightarrow$ $g^2 + f^2 = 2c$ ఇది స్పర్శరేఖాయుగ్మం లంబంగా వుండటానికి నియమం.

63. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం మీది ఏదైనా బిందువు నుంచి $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c \text{ Sin}^2 \alpha + (g^2+f^2) \cos^2 \alpha = 0, (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు గీసినట్లయితే ఆ స్పర్శరేఖాయుగ్మ రేఖల మధ్యకోణం 2α అని చూపండి.

సాధన: $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ పై $P(x_1, y_1)$ ఒక బిందువు అనుకొనుము.

$$\Rightarrow S_{11} = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \qquad .... (1)$$

$P(x_1, y_1)$ నుంచి

$$S^1 = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + [c \text{ Sin}^2 \alpha + (g^2 + f^2) \text{ Cos}^2 \alpha] = 0 \quad .... (2)$$

వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు గీసారు. ఈ స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం θ అయితే, అపుడు

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{S'_{11}}}$$

$$\Rightarrow \text{Tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - \left[c\sin^2\alpha + \left(g^2 + f^2\right)\cos^2\alpha\right]}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c\sin^2\alpha + \left(g^2 + f^2\right)\cos^2\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{g^2 + f^2 - c\text{Sin}^2\alpha - g^2\text{Cos}^2\alpha - f^2\text{Cos}^2\alpha}{-c + c\text{Sin}^2\alpha + g^2\text{Cos}^2\alpha + f^2\text{Cos}^2\alpha}}$$

$\because$ (1) నుంచి

$x_1^2+y_1^2+2g\,x_1+2fy_1 = -c$

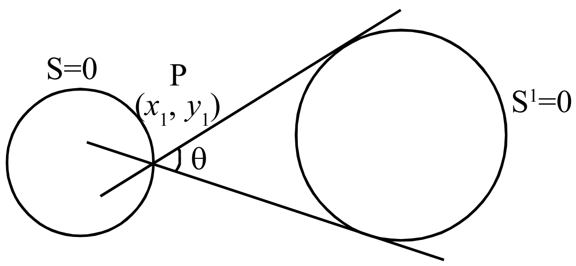
$-c + c\sin^2\alpha$

$= -c\,(1 - \sin^2\alpha)$

$= -c\cos^2\alpha$

$$= \sqrt{\frac{g^2\text{Sin}^2\alpha + f^2\text{Sin}^2\alpha - c\text{Sin}^2\alpha}{g^2\text{Cos}^2\alpha + f^2\text{Cos}^2\alpha - c\text{Cos}^2\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(g^2 + f^2 - c\right)\text{Sin}^2\alpha}{\left(g^2 + f^2 - c\right)\text{Cos}^2\alpha}}$$



$$= \sqrt{\frac{\text{Sin}^2\alpha}{\text{Cos}^2\alpha}}$$

$$= \text{Tan}\,\alpha$$

$$\therefore \text{Tan}\,\frac{\theta}{2} = \text{Tan}\,\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \alpha$$

$$\Rightarrow \theta = 2\alpha$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం 2α. అందువల్ల, నిరూపితమైనది.

64. $x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100 = 0$, $x^2 + y^2 - 22x + 4y + 100 = 0$ వృత్తాల ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కనుక్కోండి.

సాధన: $S = x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100 = 0$

$S' = x^2 + y^2 - 22x + 4y + 100 = 0$ దత్త వృత్తాలనుకొనుము.

$S = 0$ వృత్తానికి

$2g = 22,\ 2f = -4,\ c = -100$

$\therefore$ కేంద్రం $C_1 = (-g, -f) = (-11, 2)$

$r_1 =$ వ్యాసార్ధం $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{121 + 4 + 100}$

$= \sqrt{225}$

$= 15$

$S' = 0$ వృత్తానికి

$2g^1 = -22,\ 2f' = 4,\ c' = 100$

కేంద్రం $= C_2 = (-g', -f') = (+11, -2)$

$r_2 =$ వ్యాసార్ధం $= \sqrt{(-11)^2 + 2^2 - 100}$

$= \sqrt{121 + 4 - 100}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

దూరం $C_1C_2 = \sqrt{(11+11)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{484 + 16}$

$= \sqrt{500}$

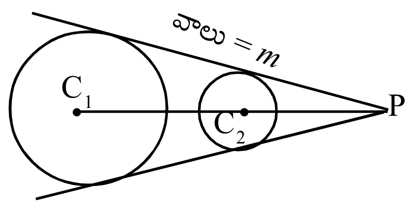
$= \sqrt{5 \times 100} = 10\sqrt{5}$

$\simeq 10(2.2) = 22$

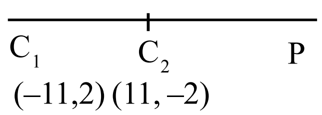
$r_1 + r_2 = 15 + 5 = 20 < C_1C_2$

$\therefore C_1C_2 > r_1 + r_2$.

$\Rightarrow$ రెండు వృత్తాలు ఖండించుకొనవు.



3:1



బాహ్య సరూపకేంద్రం P నుండి ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీసారు.

P, $\overline{C_1C_2}$ రేఖని, $r_1 = r_2 = 15 : 5 = 3 : 1$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజిస్తుంది.

$$\therefore P = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \ \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

$$= \left(\frac{3(11)-1(-11)}{3-1}, \ \frac{3(-2)-1(2)}{3-1}\right)$$

$$= \left(\frac{33+11}{2}, \ \frac{-6-2}{2}\right) = (22, -4)$$

$P(22, -4) = (x_1, y_1)$ అనుకొనుము.

ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కనుగొనుట.

P నుండి వృత్తం $S = 0$ కి గీసిన స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణం $S_1^2 = S\,S_{11}$.

$$\therefore \ S_1 = x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$

$$= x(22) + y(-4) + 11(x + 22) - 2(y - 4) - 100$$

$$= 22x - 4y + 11x + 242 - 2y + 8 - 100$$

$$= 33x - 6y + 150$$

$$S_{11} = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$$= 22^2 + (-4)^2 + 22(22) - 4(-4) - 100$$

$$= 484 + 16 + 484 + 16 - 100$$

$$= 900$$

ఇపుడు, $S_1^2 = S\,S_{11}$

$$\Rightarrow (33x - 6y + 150)^2 = [x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100]\,900$$

$$\Rightarrow [3(11x - 2y + 50)]^2 = 900(x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100)$$

$$\Rightarrow 9(11x - 2y + 50)^2 = 900(x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100)$$

$$\Rightarrow 121x^2 + 4y^2 + 2500 - 44xy - 200y + 1100x$$

$$- 100x^2 - 100y^2 - 2200x + 400y + 10000 = 0$$

$$\Rightarrow 21x^2 - 96y^2 - 44xy - 1100x + 200y + 12500 = 0$$

ఇది స్పర్శరేఖాయుగ్మ సంయుక్త సమీకరణం.

స్పర్శరేఖల సమీకరణాన్ని విడదీస్తే, స్పర్శరేఖల విడి సమీకరణాలు

$3x + 4y - 50 = 0$, $7x - 24y - 250 = 0$

రెండవ పద్ధతి

ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుగొనుట.

P $(22, -4)$, $= (x_1, y_1)$ నుంచి $S = 0$ కు ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీసారు.

ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ వాలు m అనుకొనుము. అపుడు స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y + 4 = m(x - 22)$ .... (I)

$\Rightarrow mx - y - 22m - 4 = 0$ ... (1)

అపుడు (1), $S = 0$ కు స్పర్శరేఖ.

$\Rightarrow$ వ్యాసార్థం $= C_1 = (-11, 2)$ నుండి (1) కి లంబదూరం.

$$\Rightarrow 15 = \left|\frac{m(-11) - 2 - 22m - 4}{\sqrt{m^2 + 1^2}}\right|$$

$$\Rightarrow 15\sqrt{m^2 + 1} = |-33m - 6|$$

$$\Rightarrow 15\sqrt{m^2 + 1} = 3|-11m - 2|$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{m^2 + 1} = -(11m + 2)$$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా

$25(m^2 + 1) = (11m + 2)^2$

$\Rightarrow 25m^2 + 25 = 121m^2 + 4 + 44m$

$\Rightarrow 96m^2 + 44m - 21 = 0$

$\Rightarrow 96m^2 + 44m - 21 = 0$

$$\Rightarrow m = \frac{-44 \pm \sqrt{(44^2) - 4(96)(-2)}}{2 \times 96}$$

$$= \frac{-44 \pm \sqrt{10000}}{2 \times 96}$$

$$= \frac{-44 \pm 100}{2 \times 96} = \frac{-144}{2 \times 96} \text{ or } \frac{56}{2 \times 96}$$

$= \frac{-3}{4}$ *or* $\frac{7}{24}$

(I) లో 'm' విలువలను ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు

$y + 4 = \frac{-3}{4}(x - 22)$ మరియు $y + 4 = \frac{7}{24}(x - 22)$

$\Rightarrow 3x + 4y - 50 = 0$ మరియు $7x - 24y - 250 = 0$

65. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28 = 0, x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ వృత్తాల తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలను $S = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28 = 0$

$S' = x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ అనుకొనుము.

$S = 0$ వృత్తానికి $2g = -4, 2f = -10, c = 28$ $\Rightarrow g = -2, f = -5, c = 28$

$\therefore C_1 =$ కేంద్రం $= (-g_1 - f) = (2, 5).$

వ్యాసార్థం $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 25 - 28} = 1$

$S' = 0$ వృత్తానికి $2g = 4, 2f = -6, c = 4 \Rightarrow g = 2, f = -3, c = 4$

కేంద్రం $= C_2 = (-2, 3)$, వ్యాసార్థం $r_2 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 9 - 4} = 3$

దూరం $\overline{C_1C_2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \simeq 2 \times (2.2)$

$\simeq 4.4$

$r_1 + r_2 = 1+3 = 4 > C_1 C_2$

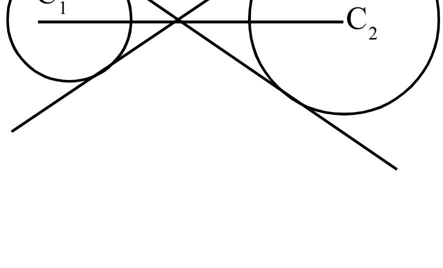
$\Rightarrow$ రెండు వృత్తాలు ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనవు.

అంతర సరూపకేంద్రం Q నుండి రెండు తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలను గీసారు.

Q, $\overline{C_1C_2}$ రేఖను $r_1 : r_2 = 1 : 3$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది.

$\therefore Q = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

$= \left(\frac{1(-2)+3(2)}{1+3}, \frac{1(3)+3(5)}{1+3}\right)$



$$=\left(\frac{-2+6}{4}, \frac{3+15}{4}\right)$$

$$=\left(1, \frac{9}{2}\right)=\left(x_1, y_1\right)$$

Q నుండి తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలను గీసారు. కనక, Q గుండా పోయే 'm' వాలుగా కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$$\Rightarrow y - \frac{9}{2} = m\,(x - 1) \qquad \text{.... (I)}$$

$$\Rightarrow 2y - 9 = 2mx - 2m$$

$$\Rightarrow 2mx - 2y + 9 - 2m = 0 \qquad \text{.... (1)}$$

ఇపుడు, $S = 0$ వృత్తానికి (1) స్పర్శరేఖ.

$\Rightarrow$ వ్యాసార్థం $= C_1 = (2, 5)$ నుండి (1) రేఖకు గల లంబదూరం

$$\Rightarrow 1 = \left|\frac{2m(2)-2(5)+9-2m}{\sqrt{(2m)^2+(-2)^2}}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{4m^2+4} = |2m-1|$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$4m^2 + 4 = (2m - 1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 4m^2 + 4 = 4m^2 + 1 - 4m$$

$$\Rightarrow \quad 4m = -3$$

$$\Rightarrow \quad m = -\frac{3}{4}$$

'm' విలువ (I) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y - \frac{9}{2} = \frac{-3}{4}(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2y-9}{2} = \frac{-3x+3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4y - 18 = -3x + 3$$

$\Rightarrow$ $3x + 4y - 21 = 0$ ఇది, ఒక తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ.

m^2 పదం కొట్టివేయబడటం వల్ల. ఒక తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ వాలు నిర్వచింపబడలేదు. కనక, ఈ స్పర్శరేఖ y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటూ Q $\left(1, \frac{9}{2}\right)$ గుండా పోతుంది.

y-అక్షానికి సమాంతరంగా వున్న రేఖ సమీకరణం $x = k$

$\left(1, \frac{9}{2}\right)$ గుండా పోతుంది కనక, $k = 1$.

$\therefore$ మరొక తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణం $x = 1$ లేదా $x - 1 = 0$

$\therefore$ తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు $x - 1 = 0$ మరియు $3x + 4y - 21 = 0$.

66. $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తానికి $lx + my + n = 0$ రేఖ అభిలంబరేఖ కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమం $gl + mf = n$ అని చూపండి.

సాధన: $lx + my + n = 0$ రేఖ $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తానికి అభిలంబరేఖ.

$\Leftrightarrow$ వృత్త కేంద్రం $(-g, -f)$, రేఖ $lx + my + n = 0$ పై ఉండటం

$\Leftrightarrow$ $l(-g) + m(-f) + n = 0$

$\Leftrightarrow$ $lg + mf = n$.

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ 2

వృత్త సరణులు

నిర్వచనము :

రెండు ఖండించుకొనే వృత్తాల ఖండన బిందువు వద్ద ఆ వృత్తాల స్పర్శరేఖల మధ్య కోణాన్ని, ఆ వృత్తాల మధ్యకోణంగా నిర్వచిస్తాం.

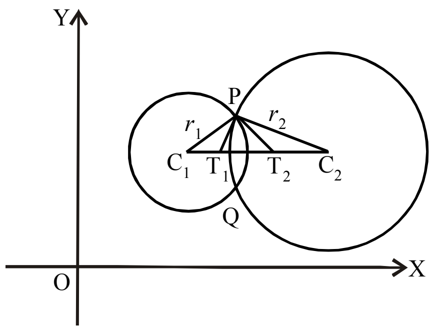
గమనిక : $S = 0, S' = 0$ వృత్తాలు P, Q ల వద్ద ఖండించుకొంటే, P, Q ల వద్ద ఆ వృత్తాల మధ్య కోణాలు సమానం.

సిద్ధాంతము : C_1, C_2 లు రెండు ఖండించుకొనే వృత్త కేంద్రాలు, $d = C_1C_2$, r_1, r_2 లు ఆ వృత్త వ్యాసార్ధాలు, వృత్తాల మధ్య కోణం θ, అయితే

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

దత్త వృత్తాల ఖండన బిందువు 'P' అనుకొందాం. ఈ బిందువు వద్ద వృత్తాలకు గీసిన స్పర్శరేఖలు, కేంద్రాలను కలిపే రేఖను T_1, T_2 లలో ఖండిస్తున్నాయనుకుందాం.

అప్పుడు $\angle T_1PT_2 = \theta$



$\angle C_1PC_2 = \angle C_1PT_2 + \angle T_2PC_2$

$= 90^0 + 90^0 - \theta$

$= 180^0 - \theta$

ΔC_1PC_2 నుంచి

కొసైన్ నియమం ప్రకారం

$(C_1C_2)^2 = (C_1P)^2 + (C_2P)^2 - 2(C_1P)(C_2P)\cos\angle C_1PC_2$

$C_1P = r_1$, P వద్ద స్పర్శరేఖ PT_2 కు లంబంగా వుంటుంది.

$\Rightarrow \angle C_1PT_2 = 90^0$

అదేవిధంగా

$C_2P = r_2$, P వద్ద స్పర్శరేఖ PT_1 కు లంబంగా వుంటుంది.

$\Rightarrow \angle C_2PT_1 = 90^0$

$$\Rightarrow d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(180^0 - \theta)$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 [-\cos\theta]$$

$$\Rightarrow d^2 - r_1^2 - r_2^2 = 2r_1 r_2 \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

$$\Rightarrow \angle T_1PT_2 + \angle T_2PC_2 = 90^0$$

$$\Rightarrow \theta + \angle T_2PC_2 = 90^0$$

$$\Rightarrow \angle T_2PC_2 = 90^0 - \theta$$

గమనిక: Cos θ విలువ ఖండన బిందువు P నిరూపకాలపై ఆధారపడి లేదు (P నిరూపకాలు కలిగిలేవు). కాబట్టి Q వద్ద కడా వృత్తాల మధ్యకోణం θ కు సమానం.

సిద్ధాంతం: $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ ఖండన వృత్తాల మధ్యకోణం 'θ' అయితే

$$\text{Cos}\ \theta = \frac{c + c' - 2gg' - 2ff'}{2\times\sqrt{g^2+f^2-c}\sqrt{(g')^2+(f')^2-c'}}$$ అని చూపండి.

ఉపపత్తి:

దత్త వృత్తాలు $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

$x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ ...(2)

లకు వరసగా కేంద్రాలు C_1, C_2 లు, వ్యాసార్ధాలు r_1, r_2 లు అనుకొందాం.

అపుడు $C_1 = (-g, -f)$ $C_2 = (-g', -f')$

$$r_1 = \sqrt{g^2+f^2-c} \qquad r_2 = \sqrt{(g')^2+(f')^2-c'}$$

$$d = C_1C_2 = \sqrt{(g'-g)^2+(f'-f)^2} \quad \text{(దూరం సూత్రం)}$$

$$= (g')^2 + g^2 + (f')^2 + f^2 - 2gg' - 2ff'$$

$$\therefore d^2 - r_1^2 - r_2^2 = (g')^2 + g^2 + (f')^2 + f^2 - 2gg' - 2ff'$$

$$-(g^2+f^2-c) - [(g')^2 + (f')^2 - c']$$

$$= -2gg' - 2ff' + c + c'$$

$$= c' + c - 2gg' - 2ff'$$

ఖండించుకొనే వృత్తాలు (1), (2) ల మధ్యకోణం 'θ' అయితే, అపుడు

$$\cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$$

$$= \frac{c + c' - 2gg' - 2ff}{2\times\sqrt{g^2+f^2-c}\times\sqrt{(g')^2+(f')^2-c'}}$$

అందువల్ల నిరూపితమైనది.

నిర్వచనం: ఖండించుకొనే రెండు వృత్తాల మధ్యకోణం లంబకోణం అనగా 90^{o} అంటే వాటిని లంబవృత్తాలు అంటాం.

లంబాత్మకతకు నియమం:

రెండు వృత్తాలు $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ లంబంగా ఖండించుకొనుటకు నియమం $\boldsymbol{2gg' + 2ff' = c + c'}$

లేదా $d^2 = r_1^2 + r_2^2$ ఇక్కడ $d =$ కేంద్రాల మధ్య దూరం, r_1, r_2 లు వృత్తాల వ్యాసార్థాలు

సిద్ధాంతం:

(i) $S = 0$, $S' = 0$ అనే రెండు వృత్తాలు రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటే $S - S' = 0$ (లేదా $S' - S = 0$) ఆ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా అవుతుంది.

(ii) $S = 0$, $S' = 0$ అనే రెండు వృత్తాలు స్పృశించుకుంటే $S - S' = 0$ (లేదా $S' - S = 0$) ఆ వృత్తాల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

సిద్ధాంతం: $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $L = lx + my + n = 0$ పరస్పరం ఖండించుకొనే వృత్తం, సరళరేఖ అయితే λ యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు $S + \lambda L = 0$ సమీకరణం $S = 0, L = 0 \ \forall \ \lambda \in \mathbf{R}$ ల ఖండన బిందువుల గుండా పోయే వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

$S = 0$ వృత్తం, $L = 0$ రేఖల ఖండన బిందువులు A, B లు అయితే A, B ల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం

$(S + \lambda L) = 0$ (A, B ల గుండా పోయే వృత్తాలు అనేక ఉన్నాయి)

సిద్ధాంతం: $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ లు ఖండించుకొనే రెండు వృత్తాలు, λ, μ లు వాస్తవసంఖ్యలు, $\lambda + \mu \neq 0$ అయితే $\lambda S + \mu S' = 0$ లేదా $S + kS' = 0,\ k \in \mathbf{R}$ సమీకరణం $S = 0$, $S' = 0$ సూచించే వృత్తాల ఖండన బిందువుల గుండా పోయే వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

గమనిక: $S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాలు A, B లలో ఖండించుకుంటే, ఉమ్మడి జ్యా $\overrightarrow{AB}$ సమీకరణం $S - S' = 0$. కనక, A, B ల గుండా పోయే ఏ వృత్త సమీకరణమైనా $S + \lambda(S - S') = 0,\ \lambda \in \mathbf{R}$ గా తీసుకొనవచ్చు. $S + \lambda L = 0$ లో $L = 0$ ను $L = (S - S') = 0$ గా తీసుకోవాలి.

కాబట్టి A, B ల గుండా పోయే ఏ వృత్త సమీకరణమైనా $S + KS' = 0, K \in \mathbf{R}$

లేదా $\lambda S + \mu S' = 0,\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

లేదా $S + \lambda(S - S') = 0,\ \lambda \in \mathbf{R}$.

రెండు వృత్తాల మూలాక్షం

నిర్వచనం: రెండు వృత్తాల మూలాక్షాన్ని, ఆ వృత్తాల దృష్ట్యా బిందుశక్తులు సమానంగా ఉంటూ చలించే ఒక బిందువు యొక్క బిందుపథంగా నిర్వచిస్తాం.

సిద్ధాంతం: $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ లు ఏకకేంద్రం కాని వృత్తాలు అయితే, వృత్తాలు $S = 0$, $S' = 0$ ల మూలాక్షం ఒక సరళరేఖ, $\boxed{S - S' = 0}$ అంటే

$2(g - g')x + 2(f - f')y + (c - c') = 0$

గమనిక :

1) $S - S' = 0$ను ఉపయోగిస్తూ మూలాక్షాన్ని కనుక్కోదలిస్తే ముందు దత్త వృత్తాల సమీకరణాలను సాధారణ రూపంలో రాయాలి (అంటే x^2, y^2 గుణకాలు 1 అయ్యేటట్లు).
2) విభిన్న వ్యాసార్థాలు గల రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాల దృష్ట్యా బిందుశక్తులు సమానం అయ్యే బిందువు ఒక్కటి కూడా ఉండదు కనక ఆ వృత్తాలకు మూలాక్షం వ్యవస్థితం కాదు.

సిద్ధాంతము : రెండు వృత్తాల మూలాక్షం ఆ వృత్తాల కేంద్రాలను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉంటుంది.

సిద్ధాంతము : రెండు వృత్తాల మూలాక్షం

i) రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనే వృత్తాలయినపుడు వాటి ఉమ్మడి జ్యా.
ii) అవి స్పృశించుకొనే వృత్తాలయినపుడు వాటి ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ.

సిద్ధాంతము : రెండు వృత్తాల కేంద్రాలను కలిపే రేఖకు వీటి ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ లంబంగా లేనట్లయితే ఆ వృత్తాల మూలాక్షం ఉమ్మడి స్పర్శరేఖకు అనుగుణంగా ఆయా వృత్తాల స్పర్శబిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

సిద్ధాంతము : ఏవైనా మూడు వృత్తాల కేంద్రాలు సరేఖీయాలు కానపుడు, ప్రతీ రెండు వృత్తాల మూలాక్షాలు అనుషక్తాలు.

మూడు మూలాక్షాలు, $S - S' = 0$, $S' - S'' = 0$ & $S - S'' = 0$ లు P వద్ద అనుషక్తాలు.

ఈ బిందువు 'P' ను మూలకేంద్రం అని అంటారు.

నిర్వచనము : (ముఖ్యమైనది)

కేంద్రాలు సరేఖీయాలు కాని మూడు వృత్తాలలోని ప్రతీ రెండు వృత్తాలకు ఏర్పడే మూలాక్షాల అనుషక్త బిందువును మూలకేంద్రమని అంటారు.

గమనిక : మూడు వృత్తాలతో ఏర్పడిన మూలకేంద్రం నుంచి ఈ వృత్తాలకు గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవులు సమానం.

సిద్ధాంతము : $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం $S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$, $S'' = x^2 + y^2 + 2g''x + 2f''y + c'' = 0$ సూచించే రెండు వృత్తాలలో ప్రతీ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తే, $S' = 0$, $S'' = 0$ వృత్తాల మూలాక్షంపై $S = 0$ యొక్క కేంద్రం వుంటుంది.

సిద్ధాంతము : $S' = 0$, $S'' = 0$, $S''' = 0$ లు మూడు వృత్తాలు. వాటి వృత్త కేంద్రాలు సరేఖీయాలు కానపుడు, ఇంకా ఏ రెండు వృత్తాలు ఖండించుకోనపుడూ

(i) వాటి మూలకేంద్రం వృత్తకేంద్రంగా
(ii) మూలకేంద్రం నుంచి మూడు వృత్తాలలో ఏ వృత్తానికైనా గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు వ్యాసార్ధంగా ఉండే వృత్తం దత్త వృత్తాలను లంబంగా ఖండిస్తుంది.

ఈ సిద్ధాంతాన్ని సమస్యలు సాధించుటలో అనువర్తిస్తాము.

సమస్యలు

1. $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 28 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ వృత్తాల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 + 4x - 14y + 28 = 0$ & $S' = x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

$2g = 4,\ 2f = -14,\ c = 28$ $\qquad$ $2g' = 4,\ 2f' = 0,\ c' = -5$

$\Rightarrow g = 2,\ 2f = -7,\ c = 28$ $\qquad$ $\Rightarrow g' = 2,\ f' = 0,\ c' = -5$

కేంద్రం $= C_1 = (-g, -f) = (-2, 7)$ $\quad C_2 = (-g', -f') = (-2, 0)$

వ్యాసార్థం $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ $\quad r_2 = \sqrt{(g')^2 + (f')^2 - c'}$

$r_1 = \sqrt{4 + 49 - 28}$ $\quad = 3$

$= \sqrt{25} = 5$

$d = C_1C_2 = \sqrt{(-2+2)^2 + (7-0)^2} = 7$

వృత్తాల మధ్యకోణం θ అయితే, అపుడు

$$\cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{49-25-9}{2\times5\times3}$$

$$= \frac{15}{2\times5\times3} = \frac{1}{2} = \cos 60^0$$

$\Rightarrow \theta = 60^0$.

$\therefore$ వృత్తాల మధ్యకోణం 60^0.

రెండవ పద్ధతి

దత్త వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 + 4x - 14y + 28 = 0$ & $S' = x^2 + y^2 + 4x + 0.y - 5 = 0$

$2g = 4 \Rightarrow g = 2$ $\quad 2g' = 4 \Rightarrow g' = 2$

$2f = -14 \Rightarrow f = -7$ $\quad 2f' = 0 \Rightarrow f' = 0$

$c = 28 \Rightarrow c = 28$ $\quad c' = -5 \Rightarrow c' = -5$

వృత్తాల మధ్యకోణం θ అయితే, అపుడు

$$\cos\theta = \frac{c + c' - 2gg' - 2ff'}{2\times\sqrt{g^2+f^2-c}\times\sqrt{(g')^2+(f')^2-c'}}$$

$$= \frac{28-5-8-0}{2\times\sqrt{4+49-28}\times\sqrt{4+0+5}}$$

$$= \frac{15}{2\times5\times3} = \frac{1}{2}$$

$= \cos 60^0$.

$\therefore$ వృత్తాల మధ్యకోణం 60^0.

2. $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0, x^2 + y^2 + kx + 6y - 59 = 0$ వృత్తాల మధ్యకోణం 45^0 అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 + kx + 6y - 59 = 0$ మరియు $S' = x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0$

$2g = k, 2f = 6, c = -59$ $\quad 2g' = -12, 2f' = -6, c' = 41$

$\Rightarrow g = \frac{k}{2}, f = 3, c = -59$ $\quad \Rightarrow g' = -6, f' = -3, c' = 41.$

వృత్తాల మధ్యకోణం $45^0 \Rightarrow \theta = 45^0$.

$$\therefore \cos\theta = \frac{c + c' - 2gg' - 2ff'}{2 \times \sqrt{g^2 + f^2 - c} \times \sqrt{(g')^2 + (f')^2 - c'}}$$

$$\Rightarrow \cos 45^0 = \frac{-59 + 41 + 6k + 18}{2\sqrt{\frac{k^2}{4} + 9 + 59} \times \sqrt{36 + 9 - 41}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{{}^{3}\cancel{6}k}{\cancel{2}\sqrt{\frac{k^2}{4} + 68} \times \sqrt{4}}$$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా

$$\frac{1}{2} = \frac{(3k)^2}{\left(\frac{k^2}{4} + 68\right) \times 4}$$

$$\Rightarrow 2(9k^2) = \left(\frac{k^2}{4} + 68\right)4$$

$$18k^2 = k^2 + 272$$

$$\Rightarrow 17k^2 = 272 \qquad \Rightarrow k^2 = \frac{272}{17} = 16 \qquad \Rightarrow \boxed{k = \pm 4}$$

3. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$, $3x^2 + 3y^2 - 8x + 29y = 0$ వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకొంటాయని చూపండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$$S = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \quad \text{మరియు} \quad S' = x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x + \frac{29}{3}y + 0 = 0$$

ఎల్లప్పుడూ వృత్త సమీకరణాలను ప్రామాణిక రూపంలో రాయాలి. అంటే x^2 గుణకం, y^2 గుణకం 1 అయ్యేటట్లుగా

కనక $3x^2 + 3y^2 - 8x + 29y = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{8x}{3} + \frac{29y}{3} = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{8x}{3} + \frac{29y}{3} = 0$$

$2g = -2, \Rightarrow g = -1 \qquad 2g' = \frac{-8}{3} \Rightarrow g' = \frac{-4}{3}$

$2f = -2 \Rightarrow f = -1 \qquad 2f' = \frac{29}{3} \Rightarrow f' = \frac{29}{6}$

$c = -7 \Rightarrow c = -7 \qquad c' = 0 \Rightarrow c' = 0.$

కనక, $2gg' + 2ff' = 2(-1)\left(\frac{-4}{3}\right) + 2(-1)\left(\frac{29}{6}\right)$

$$= \frac{8}{3} - \frac{29}{3} = \frac{8-29}{3} = \frac{-21}{3} = -7$$

$$c + c' = -7 + 0 = -7$$

$S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాలు $2gg' + 2ff' = c + c'$ నియమాన్ని తృప్తిపరిచాయి. కనక వృత్తాలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఖండించుకుంటాయి. అందువల్ల నిరూపించబడినది.

4. $x^2 + y^2 + 2by - k = 0$, $x^2 + y^2 + 2ax + 8 = 0$ వృత్తాలు లంబ వృత్తాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు $S = x^2 + y^2 + 2by - k = 0$

మరియు $S' = x^2 + y^2 + 2ax + 8 = 0$

$2g = 0$ $\quad$ $2g' = 2a$

$2f = 2b$ $\quad$ $2f' = 0$

$c = -k$ $\quad$ $c' = 8.$

$\Rightarrow g = 0,\ f = b,\ c = -k,\ g' = a,\ f' = 0,\ c' = 8.$

దత్తాంశం ప్రకారం, $S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాలు లంబ వృత్తాలు.

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$

$\Rightarrow 2(0)(a) + 2(b)(0) = -k + 8$

$\Rightarrow 0 = -k + 8$

$\Rightarrow k = 8.$

5. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax + ay$ వృత్తాల మధ్యకోణం $\frac{3\pi}{4}$ అని చూపండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు $S = x^2 + y^2 - a^2 = 0$

& $S' = x^2 + y^2 - ax - ay = 0.$

$2g = 0, \Rightarrow g = 0$ $\quad$ $2g' = -a \Rightarrow g' = \frac{-a}{2}$

$2f = 0 \Rightarrow f = 0$ $\quad$ $2f' = -a \Rightarrow f' = \frac{-a}{2}$

$c = -a^2 \Rightarrow c = -a^2$ $\quad$ $c' = 0 \Rightarrow c' = 0.$

$S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాల మధ్యకోణం 'θ' అయితే, అపుడు

$$\cos\theta = \frac{c + c' - 2gg' - 2ff'}{2 \times \sqrt{g^2 + f^2 - c} \times \sqrt{(g')^2 + (f')^2 - c'}}$$

$$= \frac{-a^2 + 0 - 0 - 0}{2\sqrt{0 + 0 + a^2} \times \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 0}}$$

$$= \frac{-a^2}{2\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{a^2}{2}}} \qquad\qquad \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{-a^2}{2 \,.\, a \,.\, \frac{a}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$= \cos(180 - 45^0)$

$= \cos 135^0.$

$$= \cos \frac{3\pi}{4}.$$

$\therefore$ S = 0, S′ = 0 వృత్తాల మధ్యకోణం $\frac{3\pi}{4}$. అందువల్ల నిరూపితమైనది.

దీర్ఘ సమాధాన సమస్యలు

6. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0, x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ వృత్తాలను లంబచ్ఛేదనం చేస్తూ, (1, 1) గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

ఇది (1, 1) గుండా పోతుంది $\Rightarrow 1^2 + 1^2 + 2g(1) + 2f(1) + c = 0$

$\Rightarrow 2g + 2f + c + 2 = 0$ ...(2)

(1), $S' = x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తుంది.

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$ $\qquad 2g' = -8 \Rightarrow g' = -4$

$\Rightarrow 2g(-4) + 2f(-1) = c + 16$ $\qquad 2f' = -2 \Rightarrow f' = -1$

$\Rightarrow -8g - 2f - c - 16 = 0$ ...(3) $\qquad c' = 16 \Rightarrow c' = 16$

మరలా, (1) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తుంది.

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$ $\qquad 2g' = -4 \Rightarrow g' = -2$

$\Rightarrow 2g(-2) + 2f(-2) = c - 1$ $\qquad 2f' = -4 \Rightarrow f' = -2$

$\Rightarrow -4g - 4f - c + 1 = 0$ ...(4) $\qquad c' = -1.$

(2), (3), (4) లను సాధించగా

$$\begin{array}{rl} (2) \Rightarrow & 2g + 2f + c + 2 = 0 \\ (3) \Rightarrow & -8g - 2f - c - 16 = 0 \\ \hline & -6g - 14 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} (3) & -8g - 2f - c - 16 = 0 \\ (4) & -4g - 4f - c + 1 = 0 \\ & \;\;+ \quad\; + \quad\; + \quad - \\ \hline & -4g + 2f - 17 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow g = \frac{-14}{6} = \frac{-7}{3}$

$\Rightarrow -4\left(-\frac{7}{3}\right) + 2f - 17 = 0$

$\Rightarrow \frac{28}{3} + 2f - 17 = 0$

$\Rightarrow 2f = \frac{23}{3} \qquad \Rightarrow \boxed{f = \frac{23}{6}}$

(2) లో 'g', 'f' విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$$2\left(\frac{-7}{3}\right) + 2\left(\frac{23}{6}\right) + c + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-14}{3} + \frac{23}{3} + c + 2 = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{14}{3} - \frac{23}{3} - 2 = \frac{14-23-6}{3} = \frac{-15}{3} = -5.$$

g, f, c విలువలు (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-7}{3}\right)x + 2\left(\frac{23}{6}\right)y - 5 = 0$$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 14x + 23y - 15 = 0$

7. క్రింది మూడు వృత్తాలను లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

$x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0$ & $x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0$.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S' = x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0 \quad ...(1)$

$S'' = x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0 \quad ...(2)$

$S''' = x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0 \quad ...(3)$

(1), (2), (3) లను లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad ...(4)$ అనుకొనుము.

(1), (4) లు లంబంగా ఉన్నాయి.

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c' \qquad 2g' = 2 \Rightarrow g' = 1$

$\Rightarrow 2g(1) + 2f\left(\frac{17}{2}\right) = c + 4 \qquad 2f' = 17 \Rightarrow f' = \frac{17}{2}$

$\Rightarrow 2g + 17f = c + 4 \quad ...(5) \qquad c' = 4$

(2), (4) లు లంబంగా ఉన్నాయి.

$\Rightarrow 2gg'' + 2ff'' = c + c'' \qquad 2g'' = 7 \Rightarrow g'' = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow 2g\left(\frac{7}{2}\right) + 2f\left(\frac{6}{2}\right) = c + 11 \qquad 2f'' = 6 \Rightarrow f'' = \frac{6}{2}$

$\Rightarrow 7g + 6f = c + 11 \quad ...(6) \qquad c'' = 11.$

(3), (4) లు లంబంగా ఉన్నాయి.

$\Rightarrow 2g\,g''' + 2f\,f''' = c + c''$ $\qquad 2g''' = -1 \Rightarrow g''' = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2g\left(-\frac{1}{2}\right) + 2f(11) = c + 3$ $\qquad 2f''' = 22 \Rightarrow f''' = 11$

$\Rightarrow -g + 22f = c + 3 \qquad ...(7)$ $\qquad c''' = 3$

(5), (6), (7) లను సాధించగా

$(5) \Rightarrow 2g + 17f = \cancel{c} + 4$ $\qquad (6) \Rightarrow 7g + 6f = \cancel{c} + 11$

$(6) \Rightarrow 7g + 6f = \cancel{c} + 11$ $\qquad (7) \Rightarrow -g + 22f = \cancel{c} + 3$

$\quad - \quad - \qquad - \quad -$ $\qquad\qquad + \quad - \qquad - \quad -$

$-5g + 11f = -7 \qquad ...(8)$ $\qquad 8g - 16f = 8 \qquad ...(9)$

(8), (9) లను సాధించగా

$8(-5g + 11f = -7)$

$5(\ 8g - 16f = 8)$

$-40g + 88f = -56$

$40g - 80f = 40$

$8f = -16$

$f = \frac{-16}{8}$

$\boxed{f = -2}$

(8) లో $f = -2$ ప్రతిక్షేపించగా

$-5g + 11(-2) = -7$

$\Rightarrow -5g = -7 + 22 = 15$

$\Rightarrow g = \frac{15}{-5} = -3.$

$\boxed{g = -3}$

'g', 'f' విలువలను (7) లో ప్రతిక్షేపించగా

$-g + 22f = c + 3$

$\Rightarrow \cancel{3} + 22(-2) = c + \cancel{3}$

$\Rightarrow \boxed{c = -44}$

'g' 'f', 'c' విలువలను (4) లో ప్రతిక్షేపించగా వచ్చేది

మనకు కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(-2)y - 44 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y - 44 = 0$

8. మూలబిందువు గుండా పోతూ, $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తూ, $x + y = 4$ సరళరేఖపై కేంద్రం కలిగివుండే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad ...(1)$ అనుకొనుము.

ఇది మూలబిందువు గుండా పోతుంది $\Rightarrow c = 0 \qquad ...(2)$

కేంద్రం $(-g, -f)$, $x + y = 4$ రేఖపై వుంది (దత్తాంశం).

$\Rightarrow (-g) + (-f) = 4 \Rightarrow -g - f = 4 \qquad ...(3)$

$S' = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ వృత్తాన్ని (1) లంబంగా ఖండిస్తుంది. ...(4)

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$ $\quad 2g' = -4 \Rightarrow g' = -2$

$\Rightarrow 2g(-2) + 2f(1) = c + 4$ $\quad 2f' = 2 \Rightarrow f' = 1$

$\Rightarrow -4g + 2f = 0 + 4 \quad \because c = 0$ $\quad c' = 4$

$\Rightarrow 2(-2g + f) = 4$

$\Rightarrow -2g + f = 2$ ...(5)

(3), (5) లను సాధించగా

$-g - f = 4$

$-2g + f = 2$ $\quad$ $g = -2$ ను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా

$-3g = 6$ $\quad$ $-(-2) - f = 4$

$\Rightarrow g = \frac{6}{-3}$ $\quad$ $\Rightarrow -f = 4 - 2 = 2$

$\Rightarrow \boxed{g = -2}$ $\quad$ $\Rightarrow \boxed{f = -2}$

$g,\ f, c$ విలువలు (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-2)y = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ Ans.

9. (2, 0), (0, 2) బిందువుల గుండా పోతూ, $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1) అనుకొనుము.

ఇది (2, 0) గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow 2^2 + 0^2 + 2g(2) + 2f(0) + c = 0$

$\Rightarrow 4g + c + 4 = 0$ ...(2)

వృత్తం (1), బిందువు (0, 2) గుండా పోతుంది $\Rightarrow 0^2 + 2^2 + 2g(0) + 2f(2) + c = 0$

$\Rightarrow 4f + c + 4 = 0$ ...(3)

వృత్తం (1), $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$ వృత్తానికి లంబంగా ఉంటుంది.

అంటే $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - \frac{6}{2}y + \frac{4}{2} = 0$

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$ $\quad 2g' = \frac{5}{2} \Rightarrow g' = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 2g\left(\frac{5}{4}\right) + 2f\left(\frac{-3}{2}\right) = c + 2$ $\quad 2f' = \frac{-6}{2} \Rightarrow f' = \frac{-3}{2}$

$c' = \frac{4}{2} = 2.$

$\Rightarrow \frac{5g}{2} - 3f = c + 2$ ...(4)

(2), (3), (4) లను సాధించగా

$(2) \Rightarrow 4g + c + 4 = 0$

$(3) \Rightarrow 4f + c + 4 = 0$

$\quad - \quad - \quad -$

$4g - 4f = 0$

$\Rightarrow 4g = 4f$

$\Rightarrow g = f$

$(2) \Rightarrow 4g + c + 4 = 0$

$(4) \Rightarrow \dfrac{5g}{2} - 3f - c - 2 = 0$

$4g + \dfrac{5g}{2} - 3f + 2 = 0$

కాని $g = f$

$$\Rightarrow 4g + \frac{5g}{2} - 3g + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8g + 5g - 6g + 4}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 7g + 4 = 0$$

$$\Rightarrow g = \frac{-4}{7} = f.$$

(2) నుండి $\because c = -4g - 4$

$$= -4\left(\frac{-4}{7}\right) - 4 = \frac{16}{7} - 4 = \frac{16-28}{7} = \frac{-12}{7}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనకు కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{-8}{7}\right)x + \left(\frac{-8}{7}\right)y - \frac{12}{7} = 0$$

$\Rightarrow \ 7x^2 + 7y^2 - 8x - 8y - 12 = 0.$

10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 21 = 0$ వృత్తాలను లంబంగా ఖండిస్తూ, $2x + 3y = 7$ వ్యాస రేఖగా గల వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1) అనుకొనుము.

ఇది $S' = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ కు లంబంగా వుంది.

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$ $\qquad 2g' = -4 \Rightarrow g' = -2$

$\Rightarrow 2g(-2) + 2f(-3) = c + 11$ $\qquad 2f' = -6 \Rightarrow f' = -3$

$\Rightarrow -4g - 6f = c + 11$ ...(2) $\qquad c' = 11$

(1), $S'' = x^2 + y^2 - 10x - 4y + 21 = 0$ కు లంబంగా వుంది.

$\Rightarrow 2gg'' + 2ff'' = c + c''$ $\qquad 2g'' = -10$

$\Rightarrow 2g(-5) + 2f(-2) = c + 21$ $\qquad 2f'' = -4$

$\Rightarrow -10g - 4f = c + 21$ ...(3) $\qquad c'' = 21$

దత్తాంశం ప్రకారం, (1) యొక్క కేంద్రం $(-g, -f)$, $2x + 3y = 7$ రేఖపై వుంది.

$\Rightarrow \ 2(-g) + 3(-f) = 7$

$\Rightarrow \ -2g - 3f = 7$ ...(4)

(2), (3), (4) లను సాధించగా

(2) $\Rightarrow\ -4g - 6f = \cancel{c} + 11$

(3) $\Rightarrow\ -10g - 4f = \cancel{c} + 21$

$\quad\ \ +\quad +\qquad -\ -$

$6g - 2f = -10$ ...(5)

(4) & (5) లను సాధించగా

$3(-2g - 3f = 7)$

$6g - 2f = -10$

$-6g - 9f = 21$

$6g - 2f = -10$

$-11f = 11$

$f = -1$

(4) లో ప్రతిక్షేపించగా $\quad -2g - 3(-1) = 7$

$\Rightarrow\ -2g = 7 - 3 = 4$

$\Rightarrow g = \dfrac{4}{-2} = -2.$

$g = -2,\ f = -1$ విలువలు (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$-4(-2) - 6(-1) = c + 11$

$\Rightarrow\ 8 + 6 - 11 = c \qquad \Rightarrow c = 3$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనకు కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-1)y + 3 = 0$

$\Rightarrow\qquad x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$

11. (2, 3) కేంద్రంగా వుంటూ $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1) అనుకొనుము.

దీని కేంద్రం (2, 3) $\Rightarrow (-g, -f) = (2, 3)$

$\Rightarrow\ -g = 2, -f = 3$

$\Rightarrow\ \boxed{g = -2},\ \ \boxed{f = -3}$

వృత్తం (1), $S' = x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$ కి లంబంగా వుంది.

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c' \qquad 2g' = -4$

$\Rightarrow 2(-2)(-2) + 2(-3)(1) = c - 7 \qquad 2f' = 2,\ c' = -7$

$\Rightarrow 8 - 6 = c - 7 \quad \Rightarrow \boxed{c = 9}$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనకు కావలసిన వృత్తం

$x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-3)y + 9 = 0$

$\Rightarrow\qquad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$

12. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తూ, బిందువు $(3, 0)$ గుండా పోతూ, y-అక్షాన్ని స్పృశించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1) అనుకొనుము.

ఇది $(3, 0)$ గుండా పోతుంది $\Rightarrow 3^2 + 0^2 + 2g(3) + 2f(0) + c = 0$

$\Rightarrow 9 + 6g + c = 0$ ...(2)

వృత్తం (1), y-అక్షాన్ని స్పృశిస్తుంది $\Rightarrow f^2 = c$ ...(3)

$\Rightarrow 2g\,g' + 2f\,f' = c + c'$ $\qquad 2g' = -6$

$\Rightarrow 2g(-3) + 2f(2) = c - 3$ $\qquad 2f' = 4$

$\Rightarrow -6g + 4f = c - 3$ ...(4) $\qquad c' = -3$

(2), (3), (4) లను సాధించగా

(2) $\Rightarrow$ $9 + 6g + c = 0$

(4) $\Rightarrow$ $-6g + 4f - c + 3 = 0$

$9 + 4f + 3 = 0$

$$\Rightarrow f = \frac{-12}{4} = -3 \qquad \boxed{f = -3}$$

(3) నుంచి

$c = f^2 = 9.$

(2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$9 + 6g + 9 = 0$

$$\Rightarrow g = \frac{-18}{6} = -3.$$

g, f, c విలువలను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(-3)y + 9 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0.$

13. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ వృత్తాల ఖండన బిందువులు మరియు $(1, 2)$ గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

$S' = x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$

ఇపుడు $S - S' = x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 - x^2 - y^2 + 2x + 15$

$= -6x - 6y + 36$

$S = 0$, $S' = 0$ ఖండన బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం

$S + \lambda(S - S') = 0, \lambda \in \mathbf{R}$ అని మనకు తెలుసు.

కనక, కావలసిన వృత్త సమీకరణం $S + \lambda(S - S') = 0.$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 + \lambda(-6x - 6y + 36) = 0$ ...(1)

ఇది (1, 2) గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow \quad 1^2 + 2^2 - 8(1) - 6(2) + 21 + \lambda(-6(1) - 6(2) + 36) = 0$

$\Rightarrow \quad 1 + 4 - 8 - 12 + 21 + \lambda(-6 - 12 + 36) = 0$

$\Rightarrow \quad 6 + \lambda\,(18) = 0$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-6}{18} = \dfrac{-1}{3}$

$\lambda = -\dfrac{1}{3}$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 + \frac{-1}{3}(-6x - 6y + 36) = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 + 2x + 2y - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ Ans.

14. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2by$ వృత్తాల ఖండన బిందువుల గుండా పోతూ $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2$ రేఖపై కేంద్రాన్ని కలిగివుండే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$$S = x^2 + y^2 - 2ax = 0 \text{ మరియు } S' = x^2 + y^2 - 2by = 0$$

ఇపుడు

$$S - S' = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2ax - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2by$$
$$= 2(by - ax)$$

$S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాల ఖండన బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం

$S + \lambda(S - S') = 0$ అనుకొనుము. ఇక్కడ $\lambda \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax + \lambda 2(by - ax) = 0 \quad \ldots(\text{I})$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax + 2b\lambda y - 2a\lambda x = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax(1+\lambda) + 2b\lambda y = 0 \quad \ldots(1)$

ఈ సమీకరణాన్ని $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$$2g = -2a(1 + \lambda),\ 2f = 2b\lambda,\ c = 0$$

$\Rightarrow \quad g = -a(1 + \lambda),\ f = b\lambda$

$\therefore$ (1) కేంద్రం $(-g, -f) = (a\,(1 + \lambda), -b\lambda) = P$

(1) సూచించే వృత్త కేంద్రమే

$\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2$ రేఖపై వుంటే, 'P' ఈ రేఖపై వుండాలి.

'P' ని $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\Rightarrow \dfrac{a(1+\lambda)}{a} - \dfrac{(-b\lambda)}{b} = 2$

$\Rightarrow 1 + \lambda + \lambda = 2 \Rightarrow 2\lambda = 2 - 1 \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{1}{2}$

(I) లో ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$x^2 + y^2 - 2ax + 2 \times \frac{1}{2}(by - ax) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax - ax + by = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 3ax + by = 0.$$

15. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$ వృత్తానికి AB ఒక జ్యా అయి, దీని సమీకరణం $x + y = 3$ అయితే AB వ్యాసంగా ఉండే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$, రేఖ $L = x + y - 3 = 0$ లు A, B బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటాయి అనుకుందాం.

అపుడు, A, B ల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం $S + \lambda L = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 + \lambda(x + y - 3) = 0 \qquad ...(I)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + (\lambda - 2)x + (4 + \lambda)y - 8 - 3\lambda = 0 \qquad ...(1)$$

$\overline{AB}$ వ్యాసంగా గల వృత్తం (1) అయితే అపుడు కేంద్రం

$$C = \left(\frac{-(\lambda-2)}{2}, \frac{-(4+\lambda)}{2}\right), \ L = 0 \text{ పై వుంటుంది.}$$

$$C = \left(\frac{-(\lambda-2)}{2}, \frac{-(4+\lambda)}{2}\right) \text{ ను } L = 0 \text{ లో ప్రతిక్షేపించగా}$$

$$\frac{-(\lambda-2)}{2} + \frac{-(4+\lambda)}{2} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\lambda + 2 - 4 - \lambda - 6}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2\lambda - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2\lambda = 8 \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{8}{-2} \qquad \Rightarrow \boxed{\lambda = -4}$$

$\lambda = -4$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 - 4(x + y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0.$$

16. P, Q బిందువులు $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా సంయుగ్మ బిందువులు అయితే $\overline{PQ}$ వ్యాసంగా కలిగేవుండే వృత్తం $S = 0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తుందని చూపండి.

సాధన: $P(x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ లు వృత్తం

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ దృష్ట్యా సంయుగ బిందువులు అనుకొందాం. ...(1)

అపుడు, $\quad S_{12} = 0 \qquad$ (నియమం)

$$\Rightarrow \quad x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0 \qquad ...(2)$$

ఇపుడు,

$\overline{AB}$ వ్యాసంగా గల వృత్తం

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \qquad ...(3)$$

(1), (3) లు లంబంగా వుంటాయని చూపాలి.

(3) ను $S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ తో పోల్చగా

$2g' = (x_1 + x_2), \quad 2f' = -(y_1 + y_2), \ c' = x_1x_2 + y_1y_2$

$$\Rightarrow \quad g' = \frac{-(x_1 + x_2)}{2}, \quad f' = \frac{-(y_1 + y_2)}{2}, \quad c' = x_1x_2 + y_1y_2$$

ఇపుడు, $2gg' + 2ff' = 2g \cdot \left[\frac{-(x_1 + x_2)}{2}\right] + 2f \cdot \left[\frac{-(y_1 + y_2)}{2}\right]$

$= -g(x_1 + x_2) - f(y_1 + y_2)$

$= x_1x_2 + y_1y_2 + c,$ ((2) నుండి)

$= c' + c.$

$2gg' + 2ff' = c + c'$ నియమాన్ని తృప్తిపరిచినాయి కనక

వృత్తాలు (1), (3) లు లంబంగా వున్నాయి.

అందువల్ల నిరూపితమైనది.

17. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ సమీకరణం సూచించే సరళరేఖ $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తాన్ని, A, B బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే $\overline{AB}$ వ్యాసంగా వుండే వృత్త సమీకరణం $(x^2 + y^2 - a^2) - 2p(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0$ అని చూపండి.

సాధన: వృత్తం $S = x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $L = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ రేఖలు A, B లలో ఖండించుకుంటాయి.

కనక, A, B ల గుండాపోయే వృత్త సమీకరణ రూపం $S + \lambda L = 0, \ \lambda \in \mathbf{R}$

$$\Rightarrow \ x^2 + y^2 - a^2 + \lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0 \qquad ...(I)$$

$$\Rightarrow \ x^2 + y^2 + (\lambda\cos\alpha)x + (\lambda\sin\alpha)y - a^2 - \lambda p) = 0 \qquad ...(1)$$

వృత్తం (1), $\overline{AB}$ వ్యాసంగా గల వృత్తమయితే,

కేంద్రం $C = \left(\frac{-\lambda\cos\alpha}{2}, \frac{-\lambda\sin\alpha}{2}\right)$, $L = 0$ పై వుంటుంది.

$L = 0$ లో బిందువు C ని ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(\frac{-\lambda\cos\alpha}{2}\right)\cos\alpha + \left(\frac{-\lambda\sin\alpha}{2}\right)\sin\alpha - p = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\lambda\cos^2\alpha - \lambda\sin^2\alpha - 2p}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \ -\lambda(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2p = 0$$

$$\Rightarrow \ -\lambda - 2p = 0$$

$$\Rightarrow \ \lambda = -2p.$$

λ విలువను (I) లో ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 - a^2 - 2p(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0$

అందువల్ల నిరూపితమైనది.

18. $2x^2 + 2y^2 + 3x + 6y - 5 = 0$, $3x^2 + 3y^2 - 7x + 8y - 11 = 0$ వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: ప్రామాణిక రూపంలో వృత్త సమీకరణాలు

$$S = \frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{6y}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Rightarrow S = x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + 3y - \frac{5}{2} = 0$$

$$S' = x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x + \frac{8}{3}y - \frac{11}{3} = 0$$

$S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాల మూలాక్షం $S - S' = 0$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \frac{3}{2}x + 3y - \frac{5}{2} - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + \frac{7}{3}x - \frac{8}{3}y + \frac{11}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x + 3y - \frac{5}{2} + \frac{7}{3}x - \frac{8}{3}y + \frac{11}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9x + 18y - 15 + 14x - 16y + 22}{6} = 0$$

$$\Rightarrow 23x + 2y + 7 = 0.$$

19. $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 6 = 0$ & $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 3 = 0$ వృత్తాల మూలకేంద్రం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$,

$S' = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 6 = 0$

$S'' = x^2 + y^2 - 12x + 2y + 3 = 0$ అనుకొనుము.

$S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాల మూలాక్షం $S - S' = 0$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2x + 6y - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 4x + 2y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 8y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x + 4y - 3 = 0 \qquad ...(1)$$

అలాగే $S' = 0$, $S'' = 0$ వృత్తాల మూలాక్షం $S' - S'' = 0$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4x - 2y + 6 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 12x - 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 8x - 4y + 3 = 0 \qquad ...(2)$$

(1), (2) లను సాధించగా, మూలకేంద్రం వస్తుంది.

$x + 4y - 3 = 0$

$8x - 4y + 3 = 0$

$9x = 0$ $\qquad$ $x = 0$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$\Rightarrow x = 0$ $\qquad$ $y = \frac{3}{4}$.

$\therefore$ మూలకేంద్రం $\left(0, \dfrac{3}{4}\right)$.

గమనిక: మూలకేంద్రాన్ని కనుక్కోవటానికి $(S - S') = 0$, $(S' - S'') = 0$, $(S - S'') = 0$ లలో ఏ రెండు సమీకరణాలనైనా సాధించవచ్చు.

20. $S = x^2 + y^2 + 3x + 5y + 4 = 0$, $S' = x^2 + y^2 + 5x + 3y + 4 = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యాను, దాని పొడవును కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన వృత్తాలు

$$S = x^2 + y^2 + 3x + 5y + 4 = 0$$

$$S' = x^2 + y^2 + 5x + 3y + 4 = 0 \text{ అనుకొనుము.}$$

$S = 0$ వృత్తానికి

కేంద్రం $C_1 = \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-5}{2}\right)$

$$r_1 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4} - 4}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 25 - 16}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$r_1 + r_2 = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$S' = 0$ వృత్తానికి

$C_2 = \left(\dfrac{-5}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$

$$r_2 = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4} - 4}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

దూరం $C_1C_2 = \sqrt{\left(\dfrac{-5}{2} + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-3}{2} + \dfrac{5}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

$$3\sqrt{2} > \sqrt{2} \text{ or } \sqrt{2} < 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow C_1C_2 < r_1 + r_2$$

$$r_1 - r_2 = 0$$

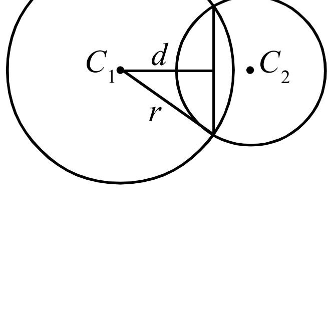
$$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < |r_1 + r_2|$$

$\Rightarrow$ వృత్తాలు ఖండించుకుంటాయి. కనక, ఉమ్మడి జ్యా $S - S' = 0$.

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 3x + 5y + \cancel{4} - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - 5x - 3y - \cancel{4} = 0$$

$$-2x + 2y = 0 \text{ లేదా } x - y = 0 \text{ మూలాక్షం.}$$

$\therefore$ ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణం $L = x - y = 0$ ...(1)



ఉమ్మడి జ్యా పొడవు $2\sqrt{r^2 - d^2}$

ఇక్కడ, $S = 0$ వృత్త వ్యాసార్థం 'r'

& $d = C_1$ నుంచి (1) కి లంబదూరం.

$$d = \frac{\left|\frac{-3}{2} + \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$ సూత్రం $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ఇక్కడ $(x_1, y_1) = C_1 = \left(\frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$ $ax + by + c$ is $x - y$. $\Rightarrow a = 1, b = -1, c = 0$

$\therefore$ ఉమ్మడి జ్యా పొడవు $= 2\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}$

$= 2 \times 2 = 4$ యూనిట్లు.

21. $S = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$, $S' = x^2 + y^2 + 6x + 2y - 90 = 0$ వృత్తాలు అంతరంగా స్పృశించుకుంటాయని చూపండి. ఇంకా స్పర్శబిందువును, ఈ బిందువు వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శరేఖను కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు $S = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ మరియు $S' = x^2 + y^2 + 6x + 2y - 90 = 0$

$S = 0$ వృత్తానికి

కేంద్రం $= C_1 = (1, 2)$

వ్యాసార్ధం $= r_1 = \sqrt{1+4+20}$

$= \sqrt{25} = 5$

$S' = 0$ వృత్తానికి

కేంద్రం $= C_2 = (-3, -1)$

వ్యాసార్ధం $= r_2 = \sqrt{9+1+90}$

$= \sqrt{100} = 10$

దూరం $C_1C_2 = \sqrt{(-3-1)^2+(-1-2)^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$C_1C_2 = |r_1 - r_2|$ అని గమనించాము. $5 = |5 - 10|$.

అందువల్ల, వృత్తాలు రెండూ అంతరంగా స్పృశించుకుంటాయి.

స్పర్శబిందువు వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శరేఖా సమీకరణం, మూలాక్షం $S - S' = 0$ అవుతుంది.

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 - x^2 - y^2 - 6x - 2y + 90 = 0$

$\Rightarrow -8x - 6y + 70 = 0$

$\Rightarrow -2(4x + 3y - 35) = 0$

$\Rightarrow 4x + 3y - 35 = 0$.

స్పర్శబిందువు P, బాహ్య సరూప కేంద్రం P, C_1C_2 ను $r_1 : r_2 = 5 : 10 = 1 : 2$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజిస్తుంది.

$$\therefore P = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

$$= \left(\frac{-3-2}{1-2}, \frac{-1-4}{1-2}\right)$$

$$= \left(\frac{-5}{-1}, \frac{-5}{-1}\right) = (5, 5).$$

గమనిక: స్పర్శబిందువు, ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ $4x + 3y - 35 = 0$ కు C_1 లేదా C_2 నుండి గీసిన లంబపాదం కూడా అవుతుంది.

$P(h, k)$, $C_1 = (x_1, y_1) = (1, 2)$, $4x + 3y - 35 = 0$ స్పర్శరేఖ $ax + by + c = 0$ అనుకొనుము.

అప్పుడు

$$\frac{h-x_1}{a} = \frac{k-y_1}{b} = \frac{-(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2} \qquad a=4 \quad b=3 \quad c=-35$$

$$\Rightarrow \frac{h-1}{4} = \frac{k-2}{3} = \frac{-(4+6-35)}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{25}{25} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{h-1}{4} = 1, \ \dfrac{k-2}{3} = 1 \\ \Rightarrow h-1 = 4, \ k-2 = 3 \end{array}\right\} \quad h = 5, \quad k = 5.$$

$\therefore$ స్పర్శబిందువు $(h, k) = (5, 5)$.

22. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$, $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y = 0$ వృత్తాలు రెండూ ఒకదానికొకటి స్పృశించుకుంటే $f'g = fg'$ అని చూపండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$$

$S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y = 0$ అనుకొనుము.

$S = 0$ వృత్తానికి

కేంద్రం $= C_1 = (-g, -f)$

వ్యాసార్థం $= r_1 = \sqrt{g^2+f^2}$

$S' = 0$ వృత్తానికి

కేంద్రం $= C_2 = (-g', -f')$

వ్యాసార్థం $= r_2 = \sqrt{(g')^2+(f')^2}$

$S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాలు అంతరంగా లేదా బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి అనుకుందాం.

అపుడు, $C_1C_2 = |r_1 \pm r_2|$

$$C_1C_2 = \sqrt{(-g'+g)^2+(-f'+f)^2}$$

$$= \sqrt{(g-g')^2+(f-f'^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$(C_1C_2)^2 = (r_1 \pm r_2)^2$$

$$= r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1r_2$$

$$\Rightarrow (-g'+g)^2 + (-f'+f)^2 = (g^2+f^2) + (g'^2+f'^2) \pm 2\sqrt{g^2+f^2}\ \sqrt{(g')^2+(f')^2}$$

$$\Rightarrow g^2 + (g')^2 - 2gg' + f^2 + (f')^2 - 2ff' = g^2 + f^2 + (g')^2 + (f')^2$$

$$\pm 2\sqrt{(g^2+f^2)(g'^2+f'^2)}$$

$$\Rightarrow -2gg' - 2ff' = \pm 2\sqrt{(g^2+f^2)(g'^2+f'^2)}$$

$$\Rightarrow -\cancel{2}(gg' + ff') = \pm 2\sqrt{(g^2+f^2)(g'^2+f'^2)}$$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా,

$$(gg' + ff')^2 = (g^2+f^2)(g'^2+f'^2)$$

$$\Rightarrow g^2g'^2 + f^2f'^2 + 2gg'ff' = g^2g'^2 + g^2f'^2 + g'^2f^2 + f^2f'^2$$

$$\Rightarrow g^2f'^2 + g'^2f^2 - 2gg'ff' = 0$$

$$\Rightarrow (gf')^2 + (g'f)^2 - 2(gf')\,(g'f) = 0$$

$$\Rightarrow (gf' - g'f)^2 = 0$$

$$\Rightarrow gf' = g'f.$$

అందువల్ల నియమాన్ని నిరూపించడమైనది.

23. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ అయితే $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకుంటాయని చూపండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 + 2ax + 0.y + c = 0$

$S' = x^2 + y^2 + 0.x + 2by + c = 0$ అనుకొనుము.

$S = 0$ వృత్తానికి	$S' = 0$ వృత్తానికి
కేంద్రం $= C_1 = (-a, 0)$	కేంద్రం $= C_2 = (0, -b)$
వ్యాసార్ధం $= r_1 = \sqrt{a^2 + 0^2 - c}$	వ్యాసార్ధం $= r_2 = \sqrt{0^2 + b^2 - c}$
$= \sqrt{a^2 - c}$	$= \sqrt{b^2 - c}$

$S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకోవాలంటే

$$C_1C_2 = r_1 \pm r_2$$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా

$$(c_1c_2)^2 = (r_1 \pm r_2)^2$$

$$\Rightarrow (c_1c_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1r_2$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{(0+a)^2 + (-b+0)^2}\right]^2 = (a^2 - c) + (b^2 - c) \pm 2\sqrt{a^2 - c}\sqrt{b^2 - c}$$

$$\Rightarrow \cancel{a^2} + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} - c + \cancel{b^2} - c \pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}c = \pm \cancel{2}\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)}$$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా

$$c^2 = (a^2 - c)\,(b^2 - c)$$

$$\Rightarrow \cancel{c^2} = a^2b^2 - a^2c - b^2c + c^2$$

$\Rightarrow\ 0 = a^2b^2 - a^2c - b^2c$

$\Rightarrow\ c(a^2 + b^2) = a^2b^2$

$$\Rightarrow\ c\frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2} = 1$$

$$\Rightarrow\ \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{c}$$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{c}$. అందువల్ల నిరూపించడమైనది.

24. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0,\ 2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0,\ x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ వృత్తాలను లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ ...(1)

$$S' = x^2 + y^2 + \frac{6}{2}x + \frac{8}{2}y - \frac{3}{2} = 0$$

$\Rightarrow\ S' = x^2 + y^2 + 3x + 4y - \dfrac{3}{2} = 0$ ...(2)

$\Rightarrow\ S'' = x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ ...(3)

(1), (2) ల మూలాక్షం $S - S' = 0$

$$\Rightarrow\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2x + \cancel{4y} + 1 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - 3x - \cancel{4y} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -x + 1 + \frac{3}{2} = 0$$

$\Rightarrow -x + \dfrac{5}{2} = 0$ ...(4)

(1), (3) ల మూలాక్షం $S - S'' = 0$

$\Rightarrow\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2x + 4y + 1 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2x - 6y + 3 = 0$

$\Rightarrow\ 4x - 2y + 4 = 0$

$\Rightarrow\ 2(2x - y + 2) = 0$

$\Rightarrow 2x - y + 2 = 0$ ...(5)

(4), (5) లను సాధిస్తే, మనకి మూలకేంద్రం వస్తుంది.

$$(4) \Rightarrow -x + \frac{5}{2} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

(5) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2\left(\frac{5}{2}\right) - y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 5 - y + 2 = 0$$
$$\Rightarrow y = 7$$

$\therefore$ మూలకేంద్రం $= \left(\frac{5}{2}, 7\right) = (x_1, y_1)$

ఇపుడు, వృత్తం $S = 0$ కు $\left(\frac{5}{2}, 7\right)$ నుంచి

$$\sqrt{S_{11}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 + 1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 7^2 + 2\left(\frac{5}{2}\right) + 4(7) + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 49 + 5 + 28 + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 83}$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 332}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{357}{4}}$$

$\therefore$ (1), (2), (3) లతో లంబంగా ఉన్న వృత్తం

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (\sqrt{S_{11}})^2$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 7)^2 = \frac{357}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{25}{4} + 49 - 5x - 14y = \frac{357}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 14y + \frac{25}{4} + 49 - \frac{357}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 14y + 49 + \frac{25 - 357}{4} = 0$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2-5x-14y+49-\frac{332}{4}=0$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2-5x-14y+49-83=0$$

$\Rightarrow\ x^2+y^2-5x-14y-34=0$. ఇది కావలసిన వృత్త సమీకరణం.

రెండవ పద్ధతి

$S = x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తం

$S' = x^2+y^2+2x+4y+1=0$ $\qquad 2g'=2,\ 2f'=4,\ c'=1$

$S'' = x^2+y^2+3x+4y-\frac{3}{2}=0$ $\qquad 2g''=3,\ 2f''=4,\ c''=\frac{-3}{2}$

$S''' = x^2+y^2-2x+6y-3=0$ $\qquad 2g'''=-2,\ 2f'''=6,\ c'''=-3$

వృత్తాలని లంబంగా ఖండిస్తుంది అనుకుందాం.

$S=0,\ S'=0$ లు లంబ వృత్తాలు.

$\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$

$\Rightarrow 2g(1)+2f(2)=c+1 \qquad \Rightarrow 2g+4f=c+1 \qquad ...(1)$

మరలా

$S=0,\ S''=0$ లు లంబ వృత్తాలు.

$\Rightarrow 2gg''+2ff''=c+c''$

$\Rightarrow \cancel{2}g\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right)+2f(2)=c-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow 3g+4f=c-\frac{3}{2} \qquad ...(2)$

మరలా $S=0,\ S'''=0$ లు లంబ వృత్తాలు.

$\Rightarrow 2gg'''+2ff'''=c+c'''$

$\Rightarrow 2g(-1)+2f(3)=c-3 \qquad \Rightarrow -2g+6f=c-3 \qquad ...(3)$

(1), (2), (3) లను సాధించగా

(1) $\Rightarrow 2g+4f=c+1$

(2) $\Rightarrow 3g+4f=c-\frac{3}{2}$

$-\quad -\quad -\ +$

$-g = 1+\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \boxed{g=\frac{-5}{2}}$

(1) $\Rightarrow 2g+4f=c+1$

(3) $\Rightarrow -2g+6f=c-3$

$+\quad -\quad -\ +$

$4g-2f=4$

$\Rightarrow 4\left(\frac{-5}{2}\right)-2f=4$

$\Rightarrow -2f=4+10$

$f=\frac{14}{-2}=-7.$

$g = \frac{-5}{2}, f = -7$ లను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2\left(\frac{-5}{2}\right) + 4(-7) = c+1$$

$\Rightarrow \; -5 - 28 - 1 = c \;\; \Rightarrow \; c = -34$

S = 0 లో 'g', 'f', 'c' విలువలు ప్రతిక్షేపిస్తే, మనకి కావలసిన సమీకరణం

$x^2 + y^2 - 5x - 14y - 34 = 0.$

25. $2g'(g-g') + 2f'(f-f') = c - c'$ అయితే, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ వృత్తాల మూలాక్షం రెండో వృత్త వ్యాసమని (లేదా మొదటి వృత్తం రెండో వృత్త పరిధిని సమద్విఖండన చేస్తుందని) నిరూపించండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0 \qquad ...(1)$

$S' = x^2+y^2+2g'x+2f'y+c' = 0 \qquad ...(2)$

$S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాల మూలాక్షం $S - S' = 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+2gx+2fy+c - x^2 - y^2 - 2g'x - 2f'y - c' = 0$

$\Rightarrow (2g-2g')x + (2f-2f')y + c - c' = 0$

$\Rightarrow 2(g-g')x + 2(f-f')y + c - c' = 0 \qquad ...(3)$

మూలాక్షం, వృత్తం (2) కి వ్యాసమగుటకు నియమం కనుక్కోవాలి.

వృత్తం (2) కేంద్రం $(-g', -f')$.

మూలాక్షం (3), వృత్తం (2) కి వ్యాసమయితే, అపుడు కేంద్రం $(-g', -f')$, (3) పై వుండాలి.

$$2(g-g')(-g') + 2(f-f')(-f') + c - c' = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2g'(g-g') + 2f'(f-f') = c - c'$$

అందువల్ల నిరూపించబడినది.

26. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$, $x^2+y^2-8x-6y+23=0$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా రెండో వృత్తపు వ్యాసం అవుతుందని చూపండి. ఇంకా దీని పొడవును కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2+y^2-6x-4y+9 = 0 \qquad 2g=-6,\ 2f=-4,\ c=9$

$S' = x^2+y^2-8x-6y+23 = 0 \qquad 2g'=-8,\ 2f'=-6,\ c'=23$

S = 0 వృత్తానికి

కేంద్రం $= C_1 = (3,2)$

వ్యాసార్ధం $= r_1 = \sqrt{9+4-9} = 2$

S′ = 0 వృత్తానికి

కేంద్రం $= C_2 = (4,3)$

వ్యాసార్ధం $= r_2 = \sqrt{16+9-23} = \sqrt{2}$

దూరం $C_1C_2 = \sqrt{(4-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{2} < 2+\sqrt{2}.$

$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2 \qquad 2-\sqrt{2} = 2 - 1.414 = 0.586$

$\Rightarrow$ వృత్తాలు ఖండించుకుంటాయి.

ఉమ్మడి జ్యా, మూలాక్షం $S - S' = 0$ అవుతుంది.

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 - x^2 - y^2 + 8x + 6y - 23 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x + 2y - 14 = 0$

$\Rightarrow \quad x + y - 7 = 0$ ... (1) ఇది ఉమ్మడి జ్యా.

ఇది వృత్తం $S' = 0$ యొక్క వ్యాసమని చూపుట –

$S' = 0$ వృత్త కేంద్రం (4,3)

(4, 3) ని (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $4 + 3 - 7 = 0$ వస్తుంది.

$\Rightarrow S' = 0$ వృత్త కేంద్రం, మూలాక్షం అంటే $S = 0$ & $S' = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా $\overline{AB}$ పై వుంది.

$\therefore$ ఉమ్మడి జ్యా, $S' = 0$ వృత్తానికి వ్యాసమవుతుంది.

అందువల్ల నిరూపితమైనది.

$\therefore$ ఉమ్మడి జ్యా పొడవు

= వృత్తం (2) వ్యాసము

$= 2 \times$ వృత్తం (2) వ్యాసార్థం $= 2\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

లేదా

ఉమ్మడి జ్యా పొడవు

$= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$r = S = 0$ వృత్తం (2) వ్యాసార్థం

$d = C_1 = (3,2)$ నుంచి జ్యా $x + y - 7 = 0$ కు లంబదూరం.

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{(సూత్రము)}$$

$$= \frac{|3 + 2 - 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ .\ \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ఉమ్మడి జ్యా పొడవు $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$= 2 \times \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}$

$= 2 \times \sqrt{4 - 2}$

$= 2\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

27. $S \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, $S' \equiv x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా వ్యాసంగా కలిగిన వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$

$S' = x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$

S = 0 వృత్తానికి

కేంద్రం $= C_1 = \left(-1, \frac{-3}{2}\right)$

వ్యాసార్థం $= r_1 = \sqrt{1+\frac{9}{4}-1}$

$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$

S′ = 0 వృత్తానికి

కేంద్రం $= C_2 = \left(-2, \frac{-3}{2}\right)$

వ్యాసార్థం $= r_2 = \sqrt{4+\frac{9}{4}-2}$

$= \sqrt{2+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$= \frac{4.12}{2} = 2.06.$

దూరం $C_1C_2 = \sqrt{(-2+1)^2 + \left(\frac{-3}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}$

$= 1.$

$1 < \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

$\Rightarrow \ |r_1 - r_2| < C_1C_2 < |r_1 + r_2|$

$\Rightarrow$ రెండు వృత్తాలు ఒకదానికొకటి ఖండించుకుంటాయి. $\overline{AB}$ ఉమ్మడి జ్యా, మూలాక్షం $S - S' = 0$.

$\Rightarrow \ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2x + 3y + 1 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - 4x - 3y - 2 = 0$

$\Rightarrow \ -2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \ 2x + 1 = 0$

$L = 2x + 1 = 0$ అనుకొనుము.

A, B ల గుండా పోయే ఏ వృత్త సమీకరణమైనా $S + \lambda(S - S') = 0$ అని మనకు తెలుసు.

ఇక్కడ A, B లు $S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాల ఖండన బిందువులు.

$\therefore \ S + \lambda(S - S') = 0$ or $S + \lambda L = 0$

$\Rightarrow \ x^2 + y^2 + 2x + 3x + 1 + \lambda(2x + 1) = 0$

$\Rightarrow \ x^2 + y^2 + (2 + 2\lambda)x + 3y + (1 + \lambda) = 0 \qquad ...(1)$

వృత్తం (1) ఒక్కటే $\overline{AB}$ వ్యాసంగా కలిగిన వృత్తం అయితే, దీని కేంద్రం $\left(-\frac{(2+2\lambda)}{2}, \frac{3}{2}\right)$ మూలాక్షం

L = 0 పై వుంటుంది.

$\Rightarrow \ 2\left(-\frac{(2+2\lambda)}{2}\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow -2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2\lambda = -1$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనకి కావలసిన వృత్తం

$$x^2 + y^2 + \left[2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right]x + 3y + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0.$$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ 3

పరావలయం

శాంకుచ్ఛేదనాలు (Conic Sections)

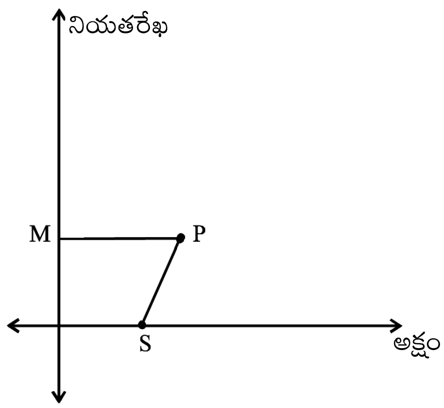
శిఖరాభిముఖ శంకు ద్వయంను ఒక సమతలంతో ఛేదిస్తే ఒక బిందువు, ఒక సరళరేఖ, సరళరేఖాయుగ్మం, వృత్తం, పరావలయం, దీర్ఘవృత్తం, అతిపరావలయాలు వస్తాయి.

గమనిక: ఏ సమతలమైనా, శంకవాన్ని రెండు సమాంతర రేఖల వెంబడి ఖండించలేదు కాబట్టి, సమాంతర రేఖాయుగ్మం శాంకవచ్ఛేదం కాదు.

శాంకవం (Conic)

ఒక సమతలంపై ఒక స్థిర బిందువు నుంచి, ఒక స్థిర సరళరేఖ నుంచి దూరాల నిష్పత్తి 'e' స్థిరంగా ఉండేటట్లు చలించే బిందువు బిందుపథాన్ని శాంకవం అంటాం.

1. స్థిర బిందువును నాభి అంటాం. సాధారణంగా నాభిని S తో సూచిస్తాం.
2. స్థిర సరళరేఖను నియతరేఖ అంటాం.
3. స్థిర నిష్పత్తి 'e' ని ఉత్కేంద్రత అంటాం.
4. నియతరేఖకు లంబంగా ఉంటూ నాభిగుండా పోయే రేఖను అక్షరేఖ అంటాం.
5. $e = 1$ అయితే శాంకవాన్ని పరావలయం అంటాం.
   $0 < e < 1$ అయితే శాంకవాన్ని దీర్ఘవృత్తం అంటాం.
   $e > 1$ అయితే శాంకవాన్ని అతిపరావలయం అంటాం.
   $e = 0$ అయితే శాంకవాన్ని వృత్తం అంటాం.



6. శాంకవం నాభులు అంతరంగా ఉంటాయి.
7. శాంకవం బాహ్య నియతరేఖలు ఎప్పుడూ ఖండించుకోవు.

పరావలయం

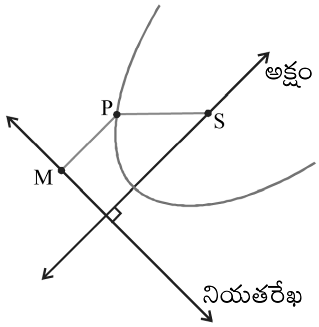
ప్రామాణిక రూపంలో పరావలయ సమీకరణం

నాభి S(α, β), నియతరేఖ $lx+my+n=0$ అనుకొందాం. అపుడు పరావలయ నిర్వచనం నుంచి పరావలయ సమీకరణం

SP = PM

$$\Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \frac{|lx+my+n|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$$. ఇది x, y లలో రెండవ తరగతి సాధారణ సమీకరణం.



పై పరావలయానికి అక్షరేఖ సమీకరణం

$m(x-\alpha)-l(y-\beta)=0$.

ప్రామాణిక రూపంలో పరావలయ సమీకరణాన్ని నిరూపించుట.

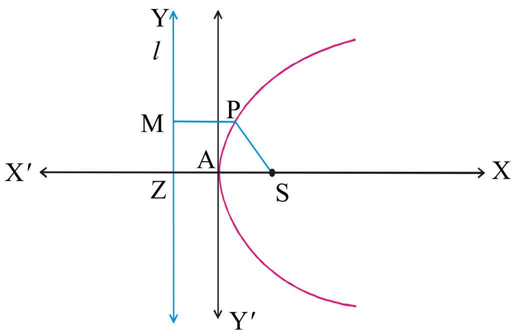
నిరూపణ: ఒక వక్రం స్వభావాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి దాని సమీకరణాన్ని అతి సులభ రూపంలో తీసుకొంటాం. అటువంటి సమీకరణాన్ని ఈకింది విధంగా రాబడదాం. పటంలో చూపినట్లు బిందువు 'S' ను నాభి, సరళరేఖ l నియతరేఖ అని అనుకొందాం. నియతరేఖకు కుడివైపు నాభి ఉందనుకొందాం.

l పై S లంబ విక్షేపాన్ని Z తో సూచిద్దాం.

ZS మధ్యబిందువును A అనుకొనుము.

ZA = AS కాబట్టి A పరావలయంపై బిందువు.

'A' ను పరావలయ శీర్షం అంటాం.



A గుండాపోతూ నియతరేఖకు సమాంతరంగా గల రేఖ $\overleftrightarrow{YAY'}$.

$\overleftrightarrow{ZXZ'}$ ను X అక్షంగాను, $\overleftrightarrow{YY'}$ ను Y అక్షంగాను తీసుకొందాం.
అప్పుడు A = (0,0) మూలబిందువు.

S = (a, 0), (a>0) అనుకొంటే, Z = (–a, 0), నియతరేఖ l సమీకరణం x + a = 0.

పరావలయం P(x_1, y_1) ఒక బిందువు. P నుంచి నియతరేఖ l కు లంబదూరం PM అయితే

$\frac{SP}{PM} = e = 1$.

$\Rightarrow SP = PM$

$\Rightarrow SP^2 = PM^2$

$\Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

$\Rightarrow y^2 = 4ax$

విపర్యయంగా $y^2 = 4ax$ ను తృప్తిపరచే బిందువు $P(x, y)$ అయితే

$$SP = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + a^2 - 2ax + 4ax} = \sqrt{(x+a)^2} = |x+a| = PM$$

కాబట్టి బిందుపథంపై $P(x, y)$ ఒక బిందువు. అంటే పరావలయంపై బిందువు $P(x, y)$ ఉండటానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమం $y^2 = 4ax$.

కాబట్టి పరావలయ సమీకరణం $y^2 = 4ax$.

వక్రం యొక్క స్వభావం, $y^2 = 4ax$, (a>0)

1. y = 0 అయితే $4ax = 0$ కాబట్టి $x = 0$.

   $\therefore$ మూలబిందువు (0, 0) గుండా వక్రం పోతుంది.

2. $x = 0$ అయితే $y^2 = 0$, $y = 0$ (రెండుసార్లు), కాబట్టి వక్రానికి మూలబిందువు Y-అక్షం స్పర్శరేఖ.

3. $y^2 = 4ax$ పరావలయంపై $P(x, y)$ ఏదైనా బిందువు. $a > 0$ కాబట్టి $x \geq 0$, $y = \pm\sqrt{4ax}$.

   $\therefore$ ప్రతి ధనవాస్తవ విలువ x కు అనురూపంగా, ఒకే పరిమాణం, వ్యతిరేక సంజ్ఞలు గల రెండు y విలువలు ఉంటాయి. వక్రం X-అక్షానికి సౌష్ఠవంగా, మొదటి, నాలుగు పాదాలలో ఉంటుంది.

   పరావలయంపై ప్రతి బిందువు (x, y) కి $x \geq 0$ కాబట్టి Y-అక్షానికి ఎడమవైపు అంటే రెండు, మూడు పాదాలలో వక్రం ఉండదు.

4. x విలువ అనంతంగా పెరిగేకొద్దీ, y విలువలు రెండూ పరిమాణాత్మకంగా, అనంతంగా పెరుగుతాయి. కనక వక్రం రెండు శాఖలు ధన X-అక్షానికి చెరోవైపు అనంతంగా విస్తరిస్తాయి. కాబట్టి ఇది వివృత వక్రం.

5. ఇంతకుముందు గమనించినట్లు పరావలయానికి నాభి S, నియతరేఖ l. $y^2 = 4ax, (a > 0)$ పరావలయానికి నాభి $S = (a, 0)$, నియతరేఖ $x + a = 0$, అక్షరేఖ $y = 0$, బిందువు $A(0, 0)$ పరావలయానికి శీర్షం అంటాం.

6. మూలబిందువును (h, k) వద్దకు సమాంతర అక్షపరివర్తనం ద్వారా జరిపితే $y^2 = 4ax$ పరావలయం సమీకరణం $(y-k)^2 = 4a(x-h)$గా రూపాంతరం చెందుతుంది. ఇది శీర్షం (h, k) వద్ద X-అక్షానికి సమాంతరంగా గల పరావలయాన్ని సూచిస్తుంది.

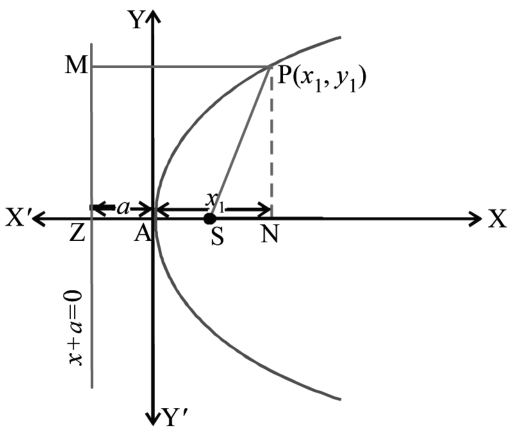
నిర్వచనాలు:

1. **జ్యా :** పరావలయంపై రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని పరావలయం 'జ్యా' అంటారు.
2. **నాభి జ్యా :** నాభి ద్వారా పోయే జ్యాను 'నాభి జ్యా' అంటాం.
3. **ద్వి y-నిరూపకం :** పరావలయంపై ఒక బిందువు P గుండా పోతూ, అక్షరేఖకు లంబంగా గల జ్యాను P ద్వి y-నిరూపకం అంటాం.
4. **నాభి లంబం :** నాభి గుండా పోయే ద్వి y-నిరూపకాన్ని నాభి లంబం అంటాం.
5. నాభి లంబం పొడవు $4a$, $(a > 0)$

   నాభిలంబం కొనలు $(a, 2a)$ and $(a, -2a)$.

గమనిక: నాభి లంబం పొడవు తెలిసినప్పుడు, ప్రామాణిక రూపంలో పరావలయం సమీకరణం, రూపాన్ని, పరిమాణాన్ని నిర్ణయించవచ్చు.

నిర్వచనం: పరావలయంపై గల ఒక బిందువు నుంచి, నాభికి గల దూరాన్ని 'నాభి దూరం' అంటాం.



సూత్రం: S$(a, 0)$ నాభిగా గల పరావలయం $y^2 = 4ax$ పై P(x_1, y_1) ఒక బిందువు.

P నాభి దూరం $= SP$
$= PM$
$= NZ$
$= NA + AZ$
$= x_1 + a$

పరావలయం-పరామితీయ సమీకరణాలు:

t అన్ని విలువలకు బిందువు $P(at^2, 2at)$ పరావలయం $y^2 = 4ax$ ను తృప్తిపరుస్తుంది. విపర్యయంగా పరావలయం $y^2 = 4ax\,(a > 0)$ పై P(x_1, y_1) బిందువు అయితే, $x \geq 0, a > 0$ కాబట్టి $x = at^2$ అయ్యేటట్లు $t \in R$ ఉంటుంది. $y^2 = 4a(at^2) = 4a^2t^2$ కాబట్టి $y = 2at$ లేదా $-2at$. అందువల్ల $(at^2, 2at)$ $\left(a(-t)^2, 2at(-t)\right)$ అనే రూపంలో P ఉంటుంది.

$\therefore$ పరావలయం పరామితీయ సమీకరణాలు $x = at^2$, $y = 2at$. సౌలభ్యం కోసం, బిందువు $P(at^2, 2at)$ ని బిందువు t గా వ్యవహరిస్తాం.

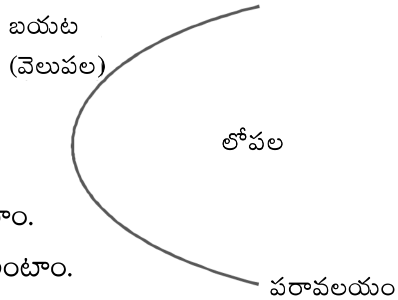
సంకేతాలు:

(1) $S = y^2 - 4ax$ (2) $S_1 = yy_1 - 2a(x + x_1)$

(3) $S_{11} = y_1^2 - 4ax_1$ (4) $S_{12} = y_1y_2 - 2a(x_1 + x_2)$

ఇక్కడ (x_1, y_1), (x_2, y_2) లు పరావలయం $y^2 = 4ax$ సమతలంలోని బిందువులు.

పరావలయం-పరావలయ సమతలంలో బిందువు



$y^2 = 4ax$ లేదా $S = y^2 - 4ax = 0$

సమతలాన్ని పరావలయం రెండు విభిన్న భాగాలుగా విభజిస్తుంది. ఒకటి నాభి ఉండే భాగం. దీనిని పరావలయ అంతర (లోపల) భాగం అంటాం. రెండోది నాభి లేని భాగం. దీనిని పరావలయ బాహ్య (వెలుపలి) భాగం అంటాం.

(i) పరావలయానికి బాహ్యంగా (వెలుపల) $P(x_1, y_1)$ ఉంటుంది.

$\Rightarrow S = y^2 - 4ax = 0 \Leftrightarrow S_{11} > 0$

(ii) $P(x_1, y_1)$ పరావలయంపై ఉంటుంది.

$S = 0 \Leftrightarrow S_{11} = 0$

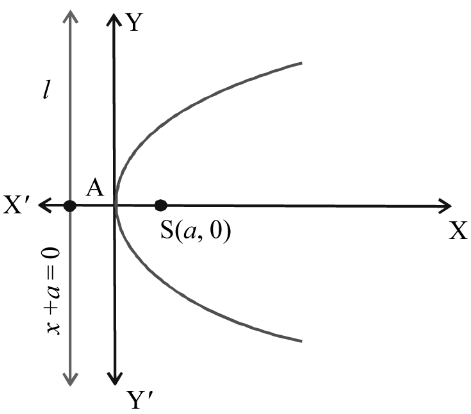
(iii) పరావలయానికి అంతరంగా (లోపల) $P(x_1, y_1)$ ఉంటుంది.

$S = 0 \Leftrightarrow S_{11} < 0$

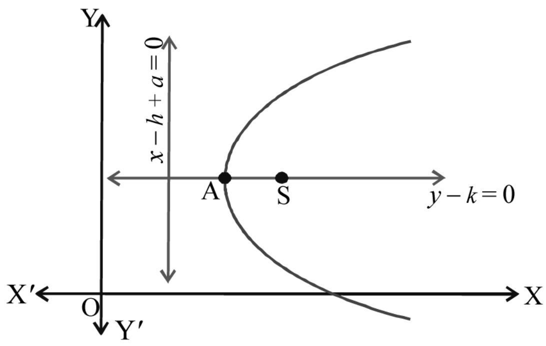
పరావలయం వివిధ రూపాలు

(i) నాభి నియతరేఖకు కుడివైపు ఉంటుంది.

పరావలయం X-అక్షం

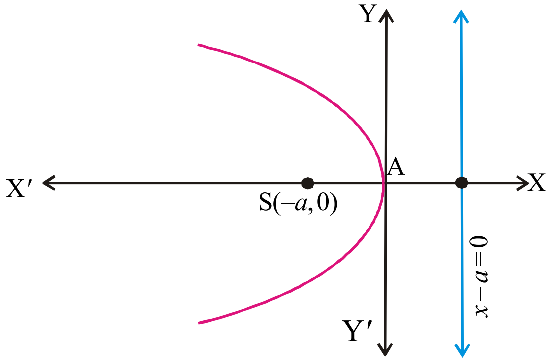
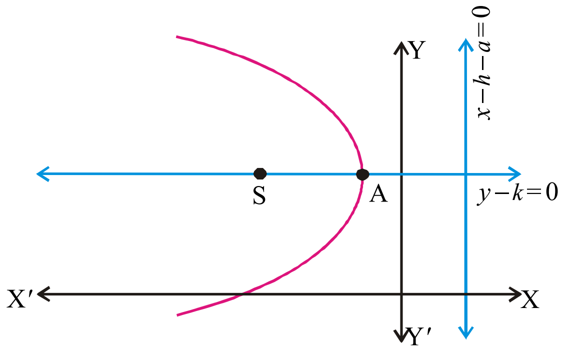


పరావలయం X అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది



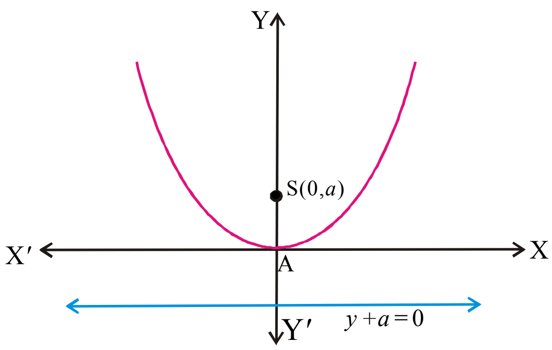
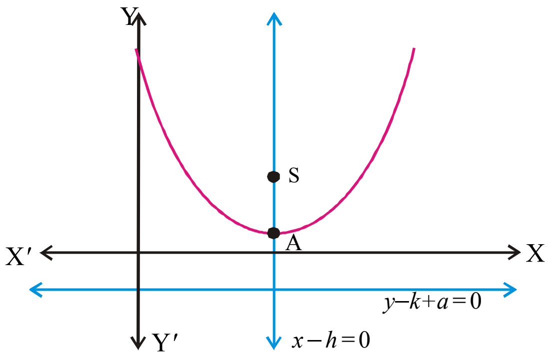
పరావలయ సమీకరణం	: $y^2 = 4ax, (a > 0)$	$(y-k)^2 = 4a(x-h), (a > 0)$
శీర్షం (A)	: (0, 0)	(h, k)
నాభి (S)	: $(a, 0)$	$(a+h, k)$
నియతరేఖ	: $x = -a$	$x - h = -a$
అక్షం	: $y = 0$	$y - k = 0$
నాభిలంబం పొడవు	: $4a$	$4a$
నాభిలంబం కొనలు	: $(a, \pm 2a)$	$(a+h, \pm 2a + k)$

(ii) నాభి నియతరేఖకు ఎడమవైపు ఉంటుంది.

పరావలయం X-అక్షం	పరావలయం X అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది
	

పరావలయ సమీకరణం	: $y^2=-4ax,(a>0)$	$(y-k)^2=-4a(x-h),(a>0)$
శీర్షం (A)	: (0, 0)	(h,k)
నాభి (S)	: $(-a,\ 0)$	$(-a+h,k)$
నియతరేఖ	: $x=a$	$x-h=a$
అక్షం	: $y=0$	$y-k=0$
నాభిలంబం పొడవు	: $4a$	$4a$
నాభిలంబం కొనలు	: $(-a,\pm 2a)$	$(-a+h,\pm 2a+k)$

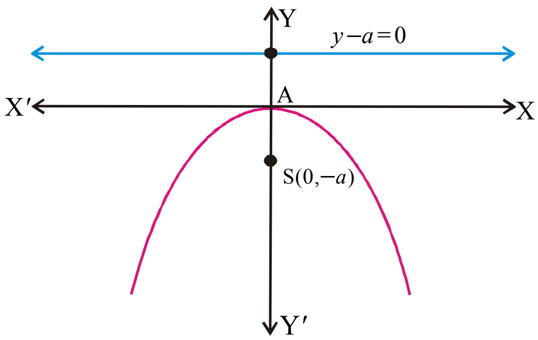
(iii) నాభి నియతరేఖకు పైన ఉంటుంది మరియు పరావలయం y-అక్షంపైన లేదా y-అక్షంకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

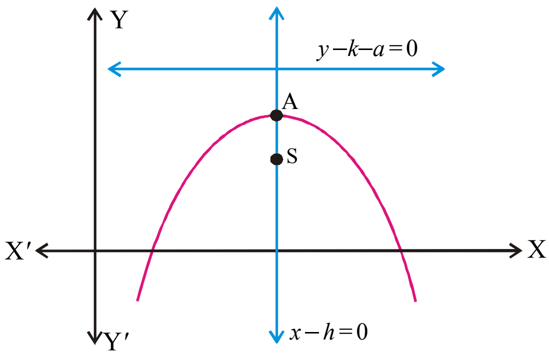
పరావలయం Y-అక్షం	పరావలయం Y అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది
	

పరావలయ సమీకరణం	: $x^2=4ay$	$(x-h)^2=4a(y-k)$
శీర్షం (A)	: (0, 0)	(h,k)
నాభి (S)	: $(0,a)$	$(h,a+k)$
నియతరేఖ	: $y=-a$	$y-k=-a$
అక్షం	: $x=0$	$x-h=0$

నాభిలంబం పొడవు	: $4a$	$4a$
నాభిలంబం కొనలు	:$(\pm 2a, a)$	$(h \pm 2a, a+k)$

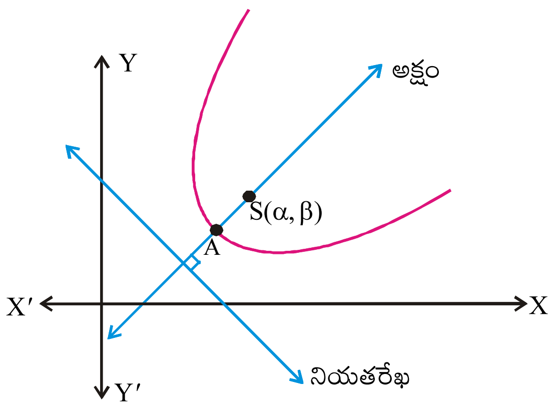
(iv) నాభి నియతరేఖకు క్రింద ఉంటుంది మరియు పరావలయం y-అక్షంపైన లేదా y-అక్షంకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.





పరావలయ సమీకరణం	: $x^2 = -4ay$, $a > 0$	$(x-h)^2 = -4a(y-k)$, $a > 0$
శీర్షం (A)	: (0, 0)	(h, k)
నాభి (S)	: $(0, -a)$	$(h, -a+k)$
నియతరేఖ	: $y = a$	$y-k=a$
అక్షం	: $x = 0$	$x-h=0$
నాభిలంబం పొడవు	: $4a$	$4a$
నాభిలంబం కొనలు	:$(\pm 2a, -a)$	$(h \pm 2a, -a+k)$

(v) అతిక్రమిత పరావలయం



పరావలయ సమీకరణం

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$$

నాభి (S) = (α, β)

నియతరేఖ: $lx+my+n=0$

అక్షం = $m(x-\alpha) - l(y-\beta) = 0$

గమనిక: 1) X-అక్షానికి సమాంతరంగా అక్షరేఖ ఉంటే, పరావలయము $x = ly^2 + my + n$

2) Y-అక్షానికి సమాంతరంగా అక్షరేఖ ఉంటే, పరావలయము $y = lx^2 + mx = n$

ఇక్కడ, l, m, n లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $l \neq 0$.

సమస్యలు

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $4y^2+12x-20y+67=0$ పరావలయ శీర్షం, నాభులు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త పరావలయం $4y^2+12x-20y+67=0$

$$\Rightarrow 4y^2-20y=-12x-67$$

$$\Rightarrow 4(y^2-5y)=-12x-67$$

$$\Rightarrow 4\left(y^2-2.y\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)=-12x-67$$

$$\Rightarrow 4\left[\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]=-12x-67$$

$$\Rightarrow \left[\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]=\frac{-12x-67}{4}$$

$$\Rightarrow \left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{-12x-67}{4}+\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{-12x-42}{4}$$

$$=\frac{-12\left(x+\frac{42}{12}\right)}{4}$$

$\Rightarrow \left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-3\left(x+\frac{7}{2}\right)$ ఇది

$(y-k)^2=-4a(x-h)$ రూపంలో

ఇక్కడ $-k=\frac{-5}{2}, -h=\frac{7}{2}, -4a=-3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow h=\frac{-7}{2}, k=\frac{5}{2}, a=\frac{3}{4}$

$(y-k)^2=-4a(x-h)$ పరావలయానికి శీర్షం (h,k), నాభులు $(h-a,k)$

$\therefore$ దత్త పరావలయానికి శీర్షం $(h,k)=\left(-\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$.

$$\text{నాభి} = S = (h-a, k)$$

$$= \left(\frac{-7}{2} - \frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-17}{4}, \frac{5}{2}\right).$$

2. $x^2 - 6x - 6y + 6 = 0$ పరావలయ శీర్షం, నాభులు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త పరావలయం $x^2 - 6x - 6y + 6 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2.x.3 + 3^2 - 3^2 - 6y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2.x.3 + 3^2 = 6y + 3$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 6\left(y + \frac{3}{6}\right)$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 6\left(y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$ ఈ సమీకరణం

$(x-h)^2 = 4a(y-k)$ రూపంలో

$$\Rightarrow h = 3, k = -\frac{1}{2},\ 4a = 6$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ శీర్షం $(h,k) = \left(3, -\frac{1}{2}\right)$

$$\text{నాభి} = (h, k+a) = \left(3, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = (3,1).$$

3. $y^2 + 6y - 2x + 5 = 0$ పరావలయం అక్షరేఖ, నియతరేఖ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త పరావలయం $y^2 + 6y - 2x + 5 = 0$

$$\Rightarrow y^2 + 2.y.3 - 2x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 2.y.3 + 3^2 - 3^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (y+3)^2 = 2x + 4$$

$$\Rightarrow (y+3)^2 = 2(x+2)$$ ఈ సమీకరణం

$(y-k)^2 = 4a(x-h)$ రూపంలో

$-k = 3, -h = 2, 4a = 2$

$$\Rightarrow k=-3, h=-2, a=\frac{1}{2}.$$

పరావలయ అక్షరేఖ $y-k=0 \Rightarrow y+3=0$.

పరావలయ నియతరేఖ $x-h=-a$

$$\Rightarrow x+2+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow 2x+5=0.$$

4. $4x^2+12x-20y+67=0$ పరావలయం అక్షరేఖ, నియతరేఖల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త పరావలయం $4x^2+12x-20y+67=0$

$$\Rightarrow 4[x^2+3x]-20y+67=0$$

$$\Rightarrow 4\left[x^2+2.x.\frac{3}{2}\right]-20y+67=0$$

$$\Rightarrow 4\left[x^2+2.x.\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-20y+67=0$$

$$\Rightarrow 4\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]-20y+67=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-9-20y+67=0$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-20y+58=0$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=20y-58$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=20\left(y-\frac{58}{20}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{20}{4}\left(y-\frac{29}{10}\right)$$

$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=5\left(y-\frac{29}{10}\right)$ ఈ సమీకరణం

$(x-h)^2=4a(y-k)$ రూపంలో

ఇక్కడ, $-h=\frac{3}{2}, -k=\frac{-29}{10}, 4a=5$

$$\Rightarrow h=\frac{-3}{2}, k=\frac{29}{10}, 4a=\frac{5}{4}$$

పరావలయ అక్షరేఖ $x-h=0$

$$\Rightarrow x+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow 2x+3=0.$$

పరావలయ నియతరేఖ $y-k=-a$

$$\Rightarrow y-\frac{29}{10}=\frac{-5}{4}$$

$$\Rightarrow y-\frac{29}{10}+\frac{5}{4}=0$$

$$\Rightarrow \frac{20y-58+25}{20}=0$$

$$\Rightarrow 20y-33=0.$$

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

5. కింది పరావలయాలకు శీర్షం, నాభి నిరూపకాలు, నియతరేఖ, అక్షరేఖా సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

(i) $y^2+4x+4y-3=0$ (ii) $x^2-2x+4y-3=0$

సాధన: (i) దత్త పరావలయం $y^2+4x+4y-3=0$

$$\Rightarrow y^2+2.y.2+4x-3=0$$

$$\Rightarrow y^2+2.y.2+2^2-2^2+4x-3=0$$

$$\Rightarrow (y+2)^2-4+4x-3=0$$

$$\Rightarrow (y+2)^2=-4x+7$$

$\Rightarrow (y+2)^2=-4\left(x+\frac{7}{-4}\right)$ ఈ సమీకరణం

$(y-k)^2=-4a(x-h)$ రూపంలో

ఇక్కడ $-k=2$, $-4a=-4$, $-h=\frac{7}{-4}$

$$\Rightarrow k=-2,\ a=1,\ h=\frac{7}{4}$$

$\therefore$ శీర్షం $= (h,k) = \left(\frac{7}{4}, -2\right)$.

నాభి $= (h-a, k) = \left(\frac{7}{4} - 1, -2\right)$

$= \left(\frac{3}{4}, -2\right)$.

నియతరేఖ $x - h = a \Rightarrow x - \frac{7}{4} = 1$

$\Rightarrow 4x - 11 = 0$.

అక్షరేఖ $y - k = 0 \quad \Rightarrow y + 2 = 0$.

సాధన: (ii) దత్త పరావలయం $x^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2.x.1 + 1^2 - 1^2 + 4y - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 4y - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 = -4y + 4$

$\Rightarrow (x-1)^2 = -4(y-1)$ ఈ సమీకరణం

$(x-h)^2 = -4a(y-k)$ రూపంలో

$\Rightarrow h = 1,\ k = 1,\ 4a = 4 \ \Rightarrow\ a = 1$

$\therefore$ శీర్షం $= (h,k) = (1,1)$.

నాభి $= (h, k-a) = (1,0)$.

నియతరేఖ $y - k = a$

$\Rightarrow y - k - a = 0 \Rightarrow y - 2 = 0$.

అక్షరేఖ $x - h = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0$.

6. (−2, 1), (1, 2), (−1, 3) బిందువుల గుండా పోతూ X-అక్షానికి సమాంతరంగా అక్షరేఖ గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: పరావలయం అక్షం, X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

కనక, పరావలయ సమీకరణం $ly^2 + my + n = x$ అనుకుందాం. __(1)

(సాధారణంగా శీర్షాన్ని A తో సూచిస్తాం. కనక, బిందువులను P, B, C లుగా తీసుకుందాం)

ఇది P(−2, 1) గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow l(1)^2 + m(1) + n = -2$

$\Rightarrow l + m + n = -2$ ___ (2)

అదేవిధంగా, ఇది B = (1, 2), C (−1, 3) ల గుండా పోతుంది.

$\Rightarrow l(2)^2 + m(2) + n = 1$ and $l(3)^2 + m(3) + n = -1$

$\Rightarrow 4l + 2m + n = 1$ __ (3) and $9l + 3m + n = -1$ __ (4)

(2), (3), (4) లను సాధించగా l, m, n విలువలు

$$\begin{array}{l} l+m+n=-2-(2) \\ 4l+2m+n=1-(3) \\ \hline -3l-m \quad =-3-(5) \end{array} \qquad \begin{array}{l} l+m+n=-2-(2) \\ 9l+3m+n=-1-(4) \\ \hline -8l-2m \quad =-1-(6) \end{array}$$

$$\Rightarrow (3l+m=3) \quad \text{\_\_}(5)$$
$$8l+2m=1 \quad \text{\_\_}(6)$$

$$\begin{array}{l} 6l+2m=6 \\ 8l+2m=1 \\ \hline -2l=5 \end{array} \quad \Rightarrow \boxed{l=-\frac{5}{2}}$$

(5) లో ప్రతిక్షేపించగా $\frac{15}{2} - m = -3$

$$\Rightarrow m = \frac{15}{2} + 3 = \frac{21}{2}$$

$$\boxed{m = \frac{21}{2}}$$

(2) నుండి $n = -2 - l - m$

$$\Rightarrow n = -2 + \frac{5}{2} - \frac{21}{2} = -10$$

$$\Rightarrow \boxed{n = -10}$$

l, m, n విలువలు (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనకు కావలసిన పరావలయం

$$\frac{-5}{2}y^2 + \frac{21}{2}y - 10 = x$$

$$\Rightarrow \frac{-5y^2 + 21y - 20}{2} = x$$

$$\Rightarrow -5y^2 + 21y - 20 = 2x$$

$$\Rightarrow 5y^2 - 21y + 2x + 20 = 0.$$

7. (4, 5), (–2, 11), R = (–4, 21) బిందువుల గుండా పోతూ Y-అక్షానికి సమాంతరంగా అక్షరేఖ గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: పరావలయం అక్షం, Y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

కనక, పరావలయ సమీకరణం $lx^2 + mx + n = y$ అనుకుందాం. __(1)

ఇది P(4, 5) గుండా పోతుంది.

$$\Rightarrow l(4)^2 + m(4) + n = 5.$$

$$\Rightarrow 16l + 4m + n = 5 \quad \text{\_\_(2)}$$

మరలా, ఇది Q(–2, 11), R(–4, 21) ల గుండా పోతుంది.

$$\Rightarrow l(-2)^2 + m(-2) + n = 11 \quad \text{and} \quad l(-4)^2 + m(-4) + n = 21$$

$$\Rightarrow 4l - 2m + n = 11 \quad \text{\_\_\_(3)} \qquad 16l - 4m + n = 21 \quad \text{\_\_\_(4)}$$

(2), (3), (4) లను సాధించగా l, m, n విలువలు

(2) $\Rightarrow 16l + 4m + n = 5$

(3) $\Rightarrow \underline{4l - 2m + n = 11}$

$\underline{12l + 6m = -6}$

$\Rightarrow 6l + 3m = -3 \quad -(5)$

(3) $\Rightarrow 4l - 2m + n = 11$

(4) $\Rightarrow \underline{16l - 4m + n = 21}$

$\underline{-12l + 2m = -10}$

$\Rightarrow -6l + m = -5 \quad \text{\_\_(6)}$

(5) $\Rightarrow \quad 6l + 3m = -3$

(6) $\Rightarrow \quad \underline{-6l + m = -5}$

$\underline{4m = -8} \quad \Rightarrow \boxed{m = -2}$

(6) లో ప్రతిక్షేపించగా $\quad -6l - 2 = -5$

$$\Rightarrow -6l = -5 + 2$$

$$\Rightarrow -6l = -3$$

$$\Rightarrow \boxed{l = \frac{1}{2}}$$

l, m విలువలు (3) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$+4\left(\frac{1}{2}\right) - 2(-2) + n = 11$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + n = 11$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 5}$$

l, m, n విలువలు (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనకు కావలసిన పరావలయ సమీకరణం

$$\frac{1}{2}x^2 + (-2)x + 5 = y$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4x+10}{2}=y$$

$$\Rightarrow x^2-4x+10=2y$$

$$\Rightarrow x^2-4x-2y+10=0$$

8. నాభి (–2, 3), నియతరేఖ $2x+3y-4=0$ గా గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి. నాభిలంబం పొడవు, అక్షరేఖ సమీకరణాలు కూడా కనుక్కోండి.

సాధన: నాభి $S=(-2,3)$, నియతరేఖ $2x+3y-4=0$ ఇవ్వబడినవి.

పరావలయ సమీకరణం నిర్వచనం నుండి SP = PM.

ఇక్కడ P = (x_1, y_1) పరావలయంపై ఏదైనా బిందువు.

$\therefore$ SP = PM (P నుంచి నియతరేఖకు గల దూరం)

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1+2)^2+(y_1-3)^2}=\left|\frac{2x_1+3y_1-4}{\sqrt{2^2+3^2}}\right|$$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా

$$13\left[(x_1+2)^2+(y_1-3)^2\right]=\left|2x_1+3y_1-4\right|^2$$

$$\Rightarrow 13(x_1^2+4x_1+4+y_1^2-6y_1+9)=4x_1^2+9y_1^2+16+12x_1y_1-24y_1-16x_1$$

$$\Rightarrow 9x_1^2-12x_1y_1+4y_1^2+68x_1-54y_1+153=0$$

కావలసిన పరావలయం P బిందుపథ సమీకరణం.

$$\Rightarrow 9x^2-12xy+4y^2+68x-54y+153=0$$

నాభి లంబం పొడవు

= $4a$

= $2(2a)$

= 2 x నాభి నుంచి నియతరేఖకు గల దూరం

= 2 x SZ

$$=2\times\left|\frac{2(-2)+3(3)-4}{\sqrt{2^2+3^2}}\right| \qquad \text{సూత్రం : } \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{13}} \qquad \text{ఇక్కడ } (x_1y_1)=S$$

$$=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

నియతరేఖ అక్షరేఖకు లంబంగా ఉంటుంది మరియు అక్షరేఖ నాభిగుండా పోతుంది.

$\therefore$ నియతరేఖ వాలు $\frac{-2}{3}\Rightarrow$ అక్షరేఖ వాలు $\frac{3}{2}$

$\therefore$ వాలు $\frac{3}{2}$ మరియు నాభి $S(-2,3)$ గుండాపోయే అక్షరేఖ సమీకరణం

$$y-3=\frac{3}{2}(x+2)$$

$$\Rightarrow 3x-2y+12=0.$$

9. నాభి S(1, −7), శీర్షం A(1, −2) గా గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: పరావలయ నాభి = $S=(1,-7)$

శీర్షం = $A=(1,-2)$

నాభి, శీర్షం పరావలయ అక్షంపై బిందువులు.

నాభి, శీర్షాలలో x-నిరూపకాలు సమానం. కనుక $\overleftrightarrow{AS}$ y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

శీర్షం $A=(1,-2)$ అయితే పరావలయ సమీకరణం $(x-h)^2=\pm 4a(y-k)$

$(x-h)^2=\pm 4a(y-k)$

నాభి S = (1, −7) పరావలయం లోపలి బిందువు.

కనక సమీరణం $(x-h)^2=-4a(y-k)$

AS మధ్యదూరం = $a=\sqrt{(1-1)^2+(-2+7)^2}=5$

$\therefore$ కావలసిన పరావలయ సమీకరణం

$$(x-1)^2=-4(5)(y+2)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=-20(y+2).$$

అతిస్వల్ప సమాధాన తరహా ప్రశ్నలు

10. $y^2=6x$ పరావలయం దృష్ట్యా (6, −6) బిందువు స్థితి (అంతరంగా లేదా బాహ్యంగా లేదా పరిధిపై) ఉన్నదో కనుక్కోండి.

సాధన: పరావలయం $S=y^2-6x=0$

$(x_1,y_1)=6,-6)$ అనుకొనుము.

$$S_{11}=y^2-6x_1$$

$$=(6)^2-6(6)$$

$$=36-36$$

$$=0$$

$S_{11}=0\Rightarrow$ బిందువు $(6,-6)$, పరావలయం S = 0 పై వుంటుంది.

11. $y^2 = 8x$ పరావలయంపై నాభిదూరం 10 గల బిందువుల నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన: $y^2 = 8x$ పరావలయంపై $P(x_1, y_1)$ ఏదైనా బిందువు అనుకొనుము.

అపుడు $y_1^2 = 8x_1$ ___(1)

$y^2 = 8x$ ను పరావలయ ప్రామాణిక రూపం $y^2 = 4ax$ తో పోల్చగా

$4a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

P నాభి దూరం = 10 (దత్తాంశం)

$$\Rightarrow x_1 + a = 10$$

$$\Rightarrow x_1 + 2 = 10 \qquad \Rightarrow \boxed{x_1 = 8}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $y_1^2 = 8(8) = 64$

$$\Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{64} = \pm\, 8.$$

$\therefore$ నాభి దూరం 10 కలిగి, పరావలయం ఉండే బిందువులు $(x_1, y_1) = (8,8)\,\&\,(8,-8)$.

12. $y^2 = 8x$ పరావలయం, నాభి జ్యా ఒక కొన $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ అయితే రెండవ కొన నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త పరావలయం $y^2 = 8x$, దీనిని $y^2 = 4ax$ తో పోల్చగా $4a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

నాభి = $(a, 0) = (2, 0)$

నాభి జ్యా $\overline{\mathrm{PB}}$ అనుకొనుము.

$\mathrm{P} = \left(\mathrm{a}t_1^2, 2at_1\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ అనుకొనుము. (పరామితీయ నిరూపకాలు)

$$\Rightarrow at_1^2 = \frac{1}{2},\ 2at_1 = 2 \ \Rightarrow 2.2.t_1 = 2$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$$

$\mathrm{B} = \left(at_2^2, 2at_2\right)$ అనుకొనుము.

నాభి జ్యా $\overline{\mathrm{PB}}$, $t_1 t_2 = -1$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{-1}{t_1} = \frac{-1}{1/2} = -2.$$

$$\therefore \mathrm{B} = \left(at_2^2, 2at_2\right) = \left(2(-2)^2, 2(2)(-2)\right)$$

$= (8, -8)$. ఇది నాభి జ్యా $\overline{\mathrm{PB}}$ ఇంకో కొన.

13. ధన x-అక్షంపై మూలబిందువు నుంచి శీర్షం, నాభులు వరసగా 'a', 'a'' దూరాలలో గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: x-అక్షంపై వుండే శీర్షం, నాభి మూలబిందువు నుంచి a, a' దూరంలో ఉంటుంది.

శీర్షం A $= (a, 0)$ మరియు నాభి S = $(a', 0)$

AS ల మధ్యదూరం = $(a' - a)$

పరావలయ ప్రామాణిక రూపం $(y-k)^2 = 4a(x-h)$, ఇక్కడ

(h, k) = A = శీర్షం & a = దూరం AS.

$\therefore$ కావలసిన పరావలయ సమీకరణం

$$(y-0)^2 = 4(a'-a)(x-a)$$

$$\Rightarrow y^2 = 4(a'-a)(x-a).$$

14. $y^2 = 4ax$ పరావలయంలో అంతర్లిఖించిన త్రిభుజం శీర్షాల y-నిరూపకాలు $y_1, y_2 y_3$ అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం $\frac{1}{8a}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$ చ.యూనిట్లు అని చూపుము.

సాధన: దత్త పరావలయం $y^2 = 4ax$ ___(1)

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$లు పరావలయంపై మూడు బిందువులు అనుకుంటే, అప్పుడు

$y_1^2 = 4ax_1$, $y_2^2 = 4ax_2$, $y_3^2 = 4ax_3$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{y_1^2}{4a}, x_2 = \frac{y_2^2}{4a}, x_3 = \frac{y_3^2}{4a}$$

$$\therefore \Delta PQR \text{ వైశాల్యం } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{y_2^2}{4a} - \frac{y_1^2}{4a} & \frac{y_3^2}{4a} - \frac{y_1^2}{4a} \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4a}\begin{vmatrix} (y_2^2 - y_1^2) & (y_3^2 - y_1^2) \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8a}\begin{vmatrix} (y_2-y_1)(y_2+y_1) & (y_3-y_1)(y_3+y_1) \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8a}(y_2-y_1)(y_3-y_1)\begin{vmatrix} y_2 + y_1 & y_3 + y_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8a}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$$

రెండవ పద్ధతి

$\mathrm{P} = (x_1, y_1) = (at_1^2, 2at_1)$

$\mathrm{Q} = (x_2, y_2) = (at_2^2, 2at_2)$

$\mathrm{R} = (x_3, y_3) = (at_3^2, 2at_3)$ లు పరావలయం $y^2 = 4ax$ పై మూడు బిందువులు అనుకొనుము.

అపుడు, $x_1 = at_1^2,\ 2at_1 = y_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{y_1}{2a}$.

$$\Rightarrow x_1 = a\left(\frac{y_1}{2a}\right)^2 = \frac{ay_1^2}{4a^2} = \frac{y_1^2}{4a}$$

ΔPQR వైశాల్యం $= \dfrac{1}{2}\left|\sum x_1(y_2 - y_3)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\sum \frac{y_1^2}{4a}(y_2 - y_3)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{y_1^2}{4a}(y_2 - y_3) + \frac{y_2^2}{4a}(y_3 - y_1) + \frac{y_3^2}{4a}(y_1 - y_2)\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2 \times 4a}\left|y_1^2(y_2 - y_3) + y_2^2(y_3 - y_1) + y_3^2(y_1 - y_2)\right|$$

$$= \frac{1}{8a}\left|y_1^2 y_2 - y_1^2 y_3 + y_2^2 y_3 - y_1 y_2^2 + y_1 y_3^2 - y_2 y_3^2\right|$$

$= \dfrac{1}{8a}\left|(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)\right|$ చ.యూనిట్లు, ఎందుకంటే

$(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$

$$= (y_1 - y_2)(y_2 y_3 - y_1 y_2 - y_3^2 + y_1 y_3)$$

$$= \left|y_1^2 y_2 - y_1^2 y_3 + y_2^2 y_3 - y_1 y_2^2 + y_1 y_3^2 - y_2 y_3^2\right|.$$

$\therefore$ ΔPQR వైశాల్యం $= \dfrac{1}{8a}\left|(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)\right|$ చ.యూనిట్లు. అందుచేత నిరూపించడమైనది.

15. $y^2 = 4ax$ నాభి జ్యా అగ్రాలు (x_1, y_1), (x_2, y_2) అయితే $x_1 x_2 = a^2$, $y_1 y_2 = -4a^2$ అని రుజువు చేయండి.

సాధన: పరావలయం $y^2 = 4ax$ నాభి జ్యా PQ చివరి కొనలు $P(x_1, y_1) = (at_1^2, 2at_1)$, $Q(x_2, y_2) = (at_2^2, 2at_2)$ అనుకొనుము. ఇక్కడ నాభి = S = $(a, 0)$

ఇపుడు P, S, Q లు సతలీయాలు.

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{PS}$ వాలు = $\overleftrightarrow{SQ}$ వాలు

$$\Rightarrow \frac{2at_1 - 0}{at_1^2 - a} = \frac{2at_2 - 0}{at_2^2 - a}$$

$$\Rightarrow \frac{2at_1}{a(t_1^2 - 1)} = \frac{2at_2}{a(t_2^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1}$$

$$\Rightarrow t_1\left(t_2^2 - 1\right) = t_2\left(t_1^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow t_1t_2^2 - t_1 - t_1^2t_2 + t_2 = 0$$

$$\Rightarrow t_1t_2(t_2 - t_1) + \left(t_2 - t_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow (t_1t_2 + 1)\left(t_2 - t_1\right) = 0$$

$\Rightarrow t_1t_2 + 1 = 0$ ఎందుకంటే $t_1 \neq t_2$

$\Rightarrow t_1t_2 = -1$ .....(1)

(1) నుంచి $x_1.x_2 = at_1^2.at_2^2$

$= a^2(t_1t_2)^2 = a^2(-1)^2 = a^2$

$y_1y_2 = 2at_1.2at_2$

$= 4a^2t_1t_2$

$= 4a^2(-1)$

$= -4a^2$. అందుచేత నిరూపించడమైనది.

స్వల్ప సమాధాన తరహా ప్రశ్నలు

16. $y^2 = 4ax$ పరావలయ నాభి జ్యా PQ, SP = l, SQ = l' అయితే $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$ అని చూపండి.

సాధన: దత్త పరావలయ నాభి జ్యా అగ్రాలు $P = (at_1^2, 2at_1)$, $Q = (at_2^2, 2at_2)$ అనుకొనుము.

PQ నాభి జ్యా కనక,

$\boxed{t_1t_2 = -1}$

SP దూరం $= l$ (దత్తాంశం)

$$\Rightarrow \text{SP} = l = \sqrt{(a - at_1^2)^2 + (0 - 2at_1)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2t_1^4 - 2a^2t_1^2 + 4a^2t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2t_1^4 + 2a^2t_1^2}$$

$$= \sqrt{(a + at_1^2)^2}$$

$$= a + at_1^2$$

అదేవిధంగా SQ $= l' = \sqrt{(a - at_2^2)^2 + (0 - 2at_2)^2}$

$$= \sqrt{(a - at_2^2)^2 + 4a^2t_2^2}$$

$$= \sqrt{(a + at_2^2)^2}$$

$$= a + at_2^2 = a + \frac{a}{t_1^2} = \frac{at_1^2 + a}{t_1^2} \qquad \because t_1t_2 = -1$$

$$\therefore \frac{1}{l} + \frac{1}{l^1} = \frac{1}{a + at_1^2} + \frac{1}{\frac{at_1^2 + a}{t_1^2}} \qquad t_2^2 = \frac{1}{t_1^2}$$

$$= \frac{1}{a + at_1^2} + \frac{t_1^2}{a + at_1^2}$$

$$= \frac{1 + t_1^2}{a + at_1^2}$$

$$= \frac{\left(1 + t_1^2\right)}{a\left(1 + t_1^2\right)} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **4**

దీర్ఘవృత్తం

నిర్వచనము : ఉత్కేంద్రత ఒకటి కంటే తక్కువ ఉన్న శాంకవాన్ని దీర్ఘవృత్తం అంటాం. ఒక తలంలో ఒక స్థిరబిందువు నుంచి, ఒక స్థిర సరళరేఖ నుంచి గల దూరాల స్థిర నిష్పత్తి స్థిరం. 'e' **ఒకటికంటే తక్కువ అయ్యేటట్లు చలించే బిందువు పథాన్ని దీర్ఘవృత్తం అంటాం. స్థిర బిందువును నాభి అని, స్థిర సరళరేఖను నియతరేఖ అని అంటాం.**

సిద్ధాంతం : ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$

వక్ర స్వభావం : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b>0)$

(i) నిరూపక అక్షాలతో ఖండన బిందువులు: $y=0$ అయితే $x=\pm a$. అంటే వక్రం X-అక్షాన్ని A(a, 0), A'(–a, 0) ల వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి AA' = 2a. $x=0$ అయితే $y=\pm a$. అంటే వక్రం Y-అక్షాన్ని B(0, b), B'(0, –b) ల వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి BB'= 2b.

దీర్ఘ, హ్రస్వాక్షాలు

2a, 2b లు పొడవులుగా గల రేఖఖండాలు AA', BB' లను దీర్ఘవృత్తం అక్షాలు అంటాం. a > b అయితే AA' ను దీర్ఘవృత్తపు దీర్ఘాక్షం అని, BB' ను హ్రస్వాక్షం అని అంటాం. a < b అయితే AA' ను హ్రస్వాక్షం అని, BB' దీర్ఘాక్షం అని అంటాం.

జ్యా, నాభి జ్యా, నాభి లంబం

1. **జ్యా :** దీర్ఘవృత్తంపై రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని దీర్ఘవృత్తం జ్యా అంటాం.
2. **నాభి జ్యా :** నాభిగుండా పోయే జ్యాను 'నాభి జ్యా' అంటాం.
3. **నాభి లంబం:** దీర్ఘాక్షానికి లంబంగా గల నాభి జ్యాను నాభి లంబం అంటాం. కాబట్టి దీర్ఘ వృత్తానికి రెండు నాభి లంబాలు వుంటాయి.

గమనిక: నాభులు S, S', శీర్షాలు A, A' లు దీర్ఘవృత్తపు దీర్ఘాక్షంపై వుంటాయి.

ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b)$.

సమాంతర దీర్ఘ వృత్తం $b^2 = a^2\,(1-e^2)$, $\quad 0 < e < 1$

C = మూలబిందువు = (0, 0), S = నాభి = (ae, 0), S' = నాభి = (–ae, 0)

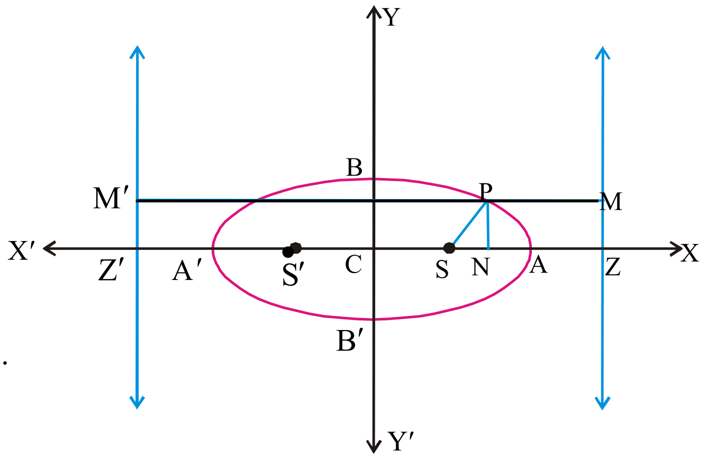
నాభుల మధ్యదూరం = SS' దూరం = 2ae.

నియతరేఖ : $\Rightarrow CZ = \frac{a}{e}$, $Z = \left(\frac{a}{e}, 0\right)$

$\Rightarrow Z' = \left(-\frac{a}{e}, 0\right)$

నియతరేఖలు $x = \frac{a}{e}$, $x = -\frac{a}{e}$

నియతరేఖల మధ్యదూరం = ZZ' దూరం = $2\frac{a}{e}$.



దీర్ఘాక్షం పొడవు: దూరం AA' = 2a

[A = (a, 0), A' = (–a, 0)]

హ్రస్వాక్షం పొడవు: BB' = 2b [∵ B = (0, b), B' = (0, –b)]

దీర్ఘవృత్తం కేంద్రం = C = SS' మధ్యబిందువు

= AA' మధ్యబిందువు

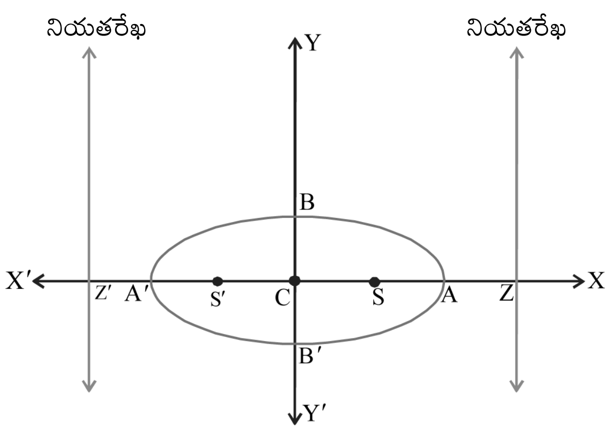
= ZZ' మధ్యబిందువు

దీర్ఘవృత్తం వివిధ రూపాలు

$a = b$ అయితే $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ మూలబిందువు కేంద్రంగా 'a' వ్యాసార్థంగా గల వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. కాబట్టి క్రింది చర్చలో $a \neq b$ అయితే, దీర్ఘవృత్తం వివిధ రూపాలు క్రింద వివరించాం.

(i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a > b > 0)$ (Fig. 4.4)

దీర్ఘాక్షం	X-అక్షం వెంబడి
దీర్ఘాక్షం పొడవు (AA')	$2a$
హ్రస్వాక్షం	Y-అక్షం వెంబడి
హ్రస్వాక్షం పొడవు (BB')	$2b$
కేంద్రం	$C=(0, 0)$
నాభులు	$S=(ae, 0)$, $S'=(-ae, 0)$
నియతరేఖల సమీకరణాలు	$x=a/e$ $x=-a/e$
ఉత్కేంద్రత	$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$



Fig

(ii) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(0<a<b)$ (Fig. 4.5)

దీర్ఘాక్షం	Y-అక్షం వెంబడి
దీర్ఘాక్షం పొడవు (BB')	$2b$
హ్రస్వాక్షం	X-అక్షం వెంబడి
హ్రస్వాక్షం పొడవు (AA')	$2a$
కేంద్రం	$C=(0,0)$
నాభులు	$S=(0,be)$ $S'=(0,-be)$
నియతరేఖల సమీకరణాలు	$y=b/e$ $y=-b/e$
ఉత్కేంద్రత	$e=\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2}}$

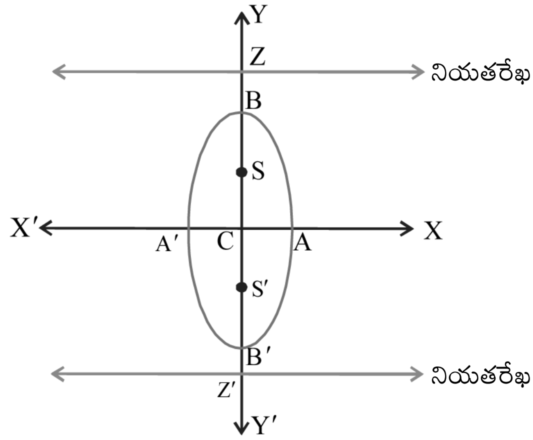


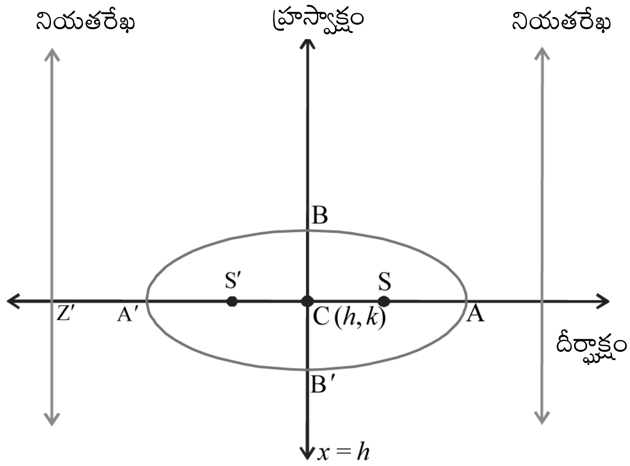
Fig.

కేంద్రం మూలబిందువు వద్ద లేనప్పుడు

XY-అక్షాలకు అక్షరేఖలు సమాంతరంగా ఉన్నప్పుడు కేంద్రం (h, k) వద్ద గల దీర్ఘవృత్తాల సమీకరణాలను కనుక్కోవడానికి (i), (ii) సమీకరణాలను ఉపయోగించి మూల బిందువును (h, k) వద్దకు సమాంతరంగా అక్షపరివర్తన చేసి క్రింది (iii), (iv) రాబట్టవచ్చు.

(iii) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ (a>b>0)$ (Fig. 4.6)

దీర్ఘాక్షం	$y=k$ వెంబడి
దీర్ఘాక్షం పొడవు (AA')	$2a$
హ్రస్వాక్షం	$x=h$ వెంబడి
హ్రస్వాక్షం పొడవు (BB')	$2b$
కేంద్రం	$C=(h,k)$
నాభులు	$S=(h+ae,k)$ $S'=(h-ae,k)$
నియతరేఖల సమీకరణాలు	$x=h+a/e$ $x=h-a/e$
ఉత్కేంద్రత	$e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$



Fig

(iv) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ (0<a<b)$, (Fig. 4.7)

దీర్ఘాక్షం	$x=h$ వెంబడి
దీర్ఘాక్షం పొడవు (BB')	$2b$
హ్రస్వాక్షం	$y=k$ వెంబడి
హ్రస్వాక్షం పొడవు (AA')	$2a$
కేంద్రం	$C=(h,k)$
నాభులు	$S=(h,k+be)$ $S'=(h,k-be)$
నియతరేఖల సమీకరణాలు	$y=k+b/e$ $y=k-b/e$
ఉత్కేంద్రత	$e=\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2}}$

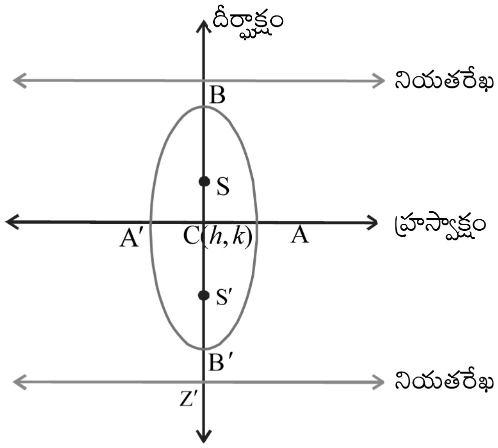
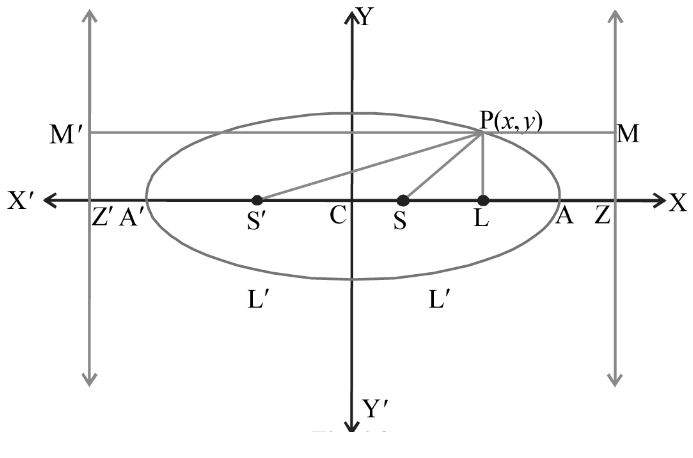


Fig.

సిద్ధాంతం: నాభులు S, S' లుగా గల దీర్ఘవృత్తం $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b)$ పై P(x, y) ఏదైనా బిందువు అయితే SP + S'P స్థిరం.



దీర్ఘవృత్తం $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b)$ నాభులు S, S' ల అనురూప నియతరేఖలు ZM, Z'M' అనుకొనుము.

దీర్ఘవృత్తంపై P ఏదైనా బిందువు. P నుంచి x-అక్షంపై లంబం PL, నియతరేఖల పైకి గీసిన లంబం M'M.

దీర్ఘవృత్తం నిర్వచనం నుంచి

$$SP = e(PM) = e(LZ) = e(CZ - CL) = e\left(\frac{a}{e} - x\right)$$

$$S'P = e(PM') = e(LZ') = e(CL + CZ') = e\left(x + \frac{a}{e}\right)$$

$\therefore$ SP + S'P = 2a = స్థిరం = దీర్ఘాక్షం పొడవు (లేదా)

SP + S'P = e(PM + PM') = e(MM')

= e × నియతరేఖల మధ్యదూరం = e × $\frac{2a}{e}$ =2a = స్థిరం.

అనుబంధ వృత్తం (Auxiliary Circle)

దీర్ఘాక్షం వ్యాసంగా గల వృత్తాన్ని దీర్ఘ వృత్తపు అనుబంధ వృత్తం (సహాయక వృత్తం) అంటాం.

దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$ అనుబంధ వృత్తం $x^2 + y^2 = a^2$.

ఉత్కేంద్రత కోణం, పరామితీయ సమీకరణాలు

దీర్ఘవృత్తంపై ఏదైనా బిందువు P నుంచి, దీర్ఘాక్షంపైకి గీసిన లంబం PN ను పొడిగిస్తే అది అనుబంధ వృత్తాన్ని Q వద్ద ఖండిస్తుందనుకొందాం. ACQ ను బిందువు P ఉత్కేంద్రీయ కోణం అంటాం. దీనిని θ లో సూచిస్తాం. $0 \le \theta < 2\pi$.

దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ పరామితీయ సమీకరణాలు $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$.

$P(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ దీర్ఘవృత్తంపై ఏదైనా బిందువు.

సూచన

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$$S_1 = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

$$S_{11} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$$

$$S_{12} = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - 1$$

S_{11} విలువ ధనాత్మకం, సున్న, ఋణాత్మకం అయిన సందర్భాలలో $P(x_1, y_1)$ బిందువు దీర్ఘవృత్తానికి బాహ్యంగా, పరిధిపై, అంతరంగా ఉంటుంది.

నియత వృత్తం (Director Circle)

S = 0 దీర్ఘ వృత్తపు లంబ స్పర్శరేఖల ఖండన బిందుపథాన్ని నియతవృత్తం $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ అంటారు.

సమస్యలు

1. నియతరేఖ $x + y + 2 = 0$ గాను, $e = \frac{2}{3}$, ఒక నాభి $(1, -1)$ వద్ద గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: నాభి $S = (1, -1)$, $e = \frac{2}{3}$, నియతరేఖ $x + y + 2 = 0$ అనుకొనుము.

$P(x_1, y_1)$ దీర్ఘవృత్తంపై ఏదైనా బిందువు అనుకొనుము.

నిర్వచనం ప్రకారం, $\frac{SP}{PM} = e$ .... (1)

P నుంచి నియతరేఖకు గల లంబదూరం PM

$$\therefore PM = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

(1) నుండి

$\therefore$ SP = e PM

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 + 1)^2} = \frac{2}{3}\frac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 + (y_1 + 1)^2 = \frac{4|x_1 + y_1 + 2|^2}{9 \times 2}$$

$$\Rightarrow 7x_1^2 + 7y_1^2 - 4x_1y_1 - 26x_1 + 10y_1 + 10 = 0$$

$\therefore P(x_1, y_1)$ బిందుపథం

$$7x^2 + 7y^2 - 4xy - 26x + 10y + 10 = 0$$

కావలసిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం.

2. నాభిలంబం పొడవు $\frac{15}{2}$, నాభుల మధ్య దూరం 2 గా గల దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం ప్రామాణిక రూపంలో కనుక్కోండి.

సాధన: దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అనుకొనుము.

నాభుల మధ్య దూరం = 2ae = 2 $\Rightarrow$ ae = 1.

నాభిలంబం పొడవు $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{15}{2}$

$\Rightarrow 4b^2 = 15a$ $\quad\quad \because b^2 = a^2(1-e^2) = a^2 - a^2e^2$

$\Rightarrow 4\left[a^2 - a^2e^2\right] = 15a$

$\Rightarrow 4a^2 - 4a^2e^2 - 15a = 0$

$\Rightarrow 4a^2 - 15a - 4 = 0$ $\quad\quad \because a^2e^2 = (ae)^2 = 1^2 = 1$

$\Rightarrow (4a+1)(a-4) = 0$

$\Rightarrow a = \dfrac{-1}{4}$ or 4

$\Rightarrow a = 4$ $\quad\quad \because a$ ధనాత్మకం, $a \neq \dfrac{-1}{4}$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - a^2e^2 = 16 - 1 = 15$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$$

3. నాభుల మధ్యదూరం 8, నియతరేఖల మధ్యదూరం 32 గా గల దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం ప్రామాణిక రూపంలో కనుక్కోండి.

సాధన: దీర్ఘవృత్తం ప్రామాణిక రూపం $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ అనుకొనుము.

నాభుల మధ్యదూరం = 2ae = 8 $\Rightarrow$ ae = 4.

నియతరేఖల మధ్యదూరం $\dfrac{2a}{e} = 32 \Rightarrow \dfrac{a}{e} = 16.$

ఇపుడు, $ae \times \dfrac{a}{e} = 4 \times 16 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8.$

$b^2 = a^2(1-e^2) = a^2 - a^2e^2 = 64 - (4)^2 = 64 - 16 = 48.$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తం $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1.$

4. ప్రామాణిక రూపంలో గల దీర్ఘవృత్తపు నాభిలంబం పొడవు, దీర్ఘాక్షం పొడవులో సగం ఉంటే ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

సాధన: దీర్ఘవృత్తం $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ అనుకొనుము.

నాభిలంబం పొడవు = $\dfrac{1}{2}$ $\times$ దీర్ఘాక్షం పొడవు

$$\Rightarrow \frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}(2a) \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow 2\left[a^2(1-e^2)\right] = a^2$$

$$\Rightarrow 2(1-e^2) = 1$$

$$\Rightarrow 1-e^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తం ఉత్కేంద్రత $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. $(-2, 2), (3, -1)$ బిందువుల గుండా పోయే దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం ప్రామాణిక రూపంలో కనుక్కోండి.

సాధన: ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ అనుకొనుము.

ఇది $(-2, 2), (3, -1)$ బిందువుల గుండా పోతుంది.

$$\Rightarrow \frac{(-2)^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1 \text{ మరియు } \frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(-1)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \left(4\times\frac{1}{a^2}\right)+\left(4\times\frac{1}{b^2}\right)=1 \text{ మరియు } \left(9\times\frac{1}{a^2}\right)+\left(1\times\frac{1}{b^2}\right)=1$$

$\frac{1}{a^2}=m,\ \frac{1}{b^2}=n$ అనుకొనుము.

అపుడు

$$\begin{aligned} 4m + 4n &= 1 \\ \underline{9m + n} &\underline{= 1} \\ 4m + 4n &= 1 \\ \underline{36m + 4n} &\underline{= 4} \\ -32m \quad &= -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{32} \Rightarrow n = 1-9m = 1-9\times\frac{3}{32} = \frac{5}{32}$$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్తం $x^2\left(\frac{1}{a^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}\right)=1$

$$\Rightarrow x^2m + y^2n = 1$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{3}{32}\right)+y^2\left(\frac{5}{32}\right)=1$$

$\Rightarrow 3x^2+5y^2=32$. ఇది కావలసిన దీర్ఘవృత్తం.

6. దీర్ఘాక్షం కొనలు (5, 0), (–5, 0) అయి, నాభి $3x - 5y - 9 = 0$ పై వుంటే దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం ప్రామాణిక రూపంలో కనుక్కోండి.

సాధన: దీర్ఘవృత్తం దీర్ఘాక్షం చివరి కొనలు A(5, 0) మరియు A'(–5, 0).

AA' మధ్య బిందువు = C = దీర్ఘవృత్త కేంద్రం

$$= \left(\frac{5+(-5)}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0, 0)$$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ మరియు $A = (5, 0) = (a, 0) \Rightarrow a = 5$.

నాభి (ae, 0) = (5e, 0), $3x - 5y - 9 = 0$ పై వుంటుంది. (దత్తాంశం)

$\Rightarrow 3(5e) - 5(0) - 9 = 0$

$\Rightarrow 15e - 9 = 0$

$\Rightarrow e = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

$$\therefore b^2 = a^2(1-e^2) = 25\left(1-\frac{9}{25}\right) = 16$$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow 16x^2+25y^2=400.$$

7. దీర్ఘవృత్తం యొక్క దీర్ఘాక్షం పొడవు, హ్రస్వాక్షం పొడవుకు మూడు రెట్లు ఉండే ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

సాధన: దీర్ఘవృత్తం ప్రామాణిక రూపం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ అనుకొనుము.

దీర్ఘాక్షం పొడవు = 3 × హ్రస్వాక్షం పొడవు

$\Rightarrow 2a = 3 \times 2b \Rightarrow a = 3b$

కాని
$$b^2 = a^2(1-e^2)$$
$$\Rightarrow b^2 = (3b)^2(1-e^2)$$
$$\Rightarrow b^2 = 9b^2(1-e^2)$$
$$\Rightarrow \frac{b^2}{9b^2} = (1-e^2)$$
$$\Rightarrow e^2 = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$
$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$ = దీర్ఘవృత్తం ఉత్కేంద్రత.

8. కింది దీర్ఘవృత్తాలకు దీర్ఘాక్షం పొడవు, హ్రస్వాక్షం, నాభిలంబం పొడవులు, ఉత్కేంద్రత, కేంద్రం, నాభులు నిరూపకాలు, నియతరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

(i) $9x^2 + 16y^2 = 144$ (ii) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ (iii) $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$

సాధన: **(i)** దత్త దీర్ఘవృత్తం $9x^2 + 16y^2 = 144$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ఈ సమీకరణాన్ని ప్రామాణిక రూపం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ తో పోల్చగా

$a^2 = 16, b^2 = 9 \Rightarrow a = 4, \quad b = 3.$

$$a > b \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\Rightarrow 9 = 16(1 - e^2)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} = 1 - e^2$$

$$\Rightarrow e^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$a > b \Rightarrow$ దీర్ఘవృత్తం సమాంతర దీర్ఘవృత్తం.

(i) దీర్ఘాక్షం పొడవు $= 2a = 8$.

(ii) హ్రస్వాక్షం పొడవు $= 2b = 6$.

(iii) నియతరేఖ పొడవు $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.9}{4} = \frac{9}{2}$

(iv) ఉత్కేంద్రత $= e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

(v) కేంద్రం $= (0, 0)$

(vi) నాభులు $= (\pm ae, 0) = (\pm\sqrt{7}, 0)$

(vii) నియతరేఖలు : $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{16}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sqrt{7}x = \pm 16$

(ii) దత్త దీర్ఘవృత్తం $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

ప్రామాణిక రూపం

$(4x^2 - 8x) + (y^2 + 2y) + 1 = 0$ లో రాయగా

$$\Rightarrow 4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2.y.1 + 1^2 - 1^2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 2.x.1 + 1^2 - 1^2) + (y + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4[(x-1)^2-1]+(y+1)^2=0$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2-4+(y+1)^2=0$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2+(y+1)^2=4$$

$$\Rightarrow \frac{4(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}=\frac{4}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

ప్రామాణిక రూపం $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ తో పోల్చగా

$h = 1, -k = 1 \Rightarrow k = -1,$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1, \; b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$\Rightarrow a < b.$

$\Rightarrow$ The ellipse is a vertical ellipse.

$a^2 = b^2(1-e^2) \Rightarrow 1 = 4(1-e^2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}=1-e^2 \Rightarrow e^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(i) దీర్ఘాక్షం పొడవు $= 2b = 4.$

(ii) హ్రస్వాక్షం పొడవు $= 2a = 2.$

(iii) నియతరేఖ పొడవు $= \frac{2a^2}{b}=\frac{2.1}{2}=1$

(iv) ఉత్కేంద్రత $= e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(v) కేంద్రం $= (h, k) = (1, -1)$

(vi) నాభులు $= (h, k\pm be) = (1, -1\pm\sqrt{3})$

(vii) నియతరేఖలు : $y-k=\pm\frac{b}{e} \Rightarrow y+1=\pm\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}y+\sqrt{3}=\pm 4$

(iii) $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$

ప్రామాణిక రూపం

$x^2 - 4x + 2y^2 + 12y + 14 = 0$

$$\Rightarrow (x^2-2.x.2)+2(y^2+6y)+14=0$$

$$\Rightarrow (x^2-2.x.2+2^2-2^2)+2(y^2+2.y.3+3^2-3^2)+14=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2-4+2[(y+3)^2-9]+14=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2-4+2(y+3)^2-18+14=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + 2(y+3)^2 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{2(y+3)^2}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

ప్రామాణిక రూపం $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ తో పోల్చగా

$h = 2, k = -3$

$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$, $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$\Rightarrow a > b \Rightarrow$ దీర్ఘవృత్తం సమాంతర దీర్ఘవృత్తం.

$b^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow 4 = 8(1-e^2)$

$$\Rightarrow \frac{4}{8} = 1 - e^2 \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(i) దీర్ఘాక్షం పొడవు $= 2a = 4\sqrt{2}$.

(ii) హ్రస్వాక్షం పొడవు $= 2b = 4$.

(iii) నియతరేఖ పొడవు $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.4}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

(iv) ఉత్కేంద్రత $= e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) కేంద్రం = C = (h, k) = (2, –3)

(vi) నాభులు = (h±ae, k) = (2±2, –3) = (4, –3), (0, –3)

(vii) నియతరేఖలు : $x - h = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x - 2 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} \Rightarrow x - 2 = \pm 4$

$\Rightarrow x - 2 = +4,\ x - 2 = -4$

$\Rightarrow x - 6 = 0,\quad x + 2 = 0$ లు నియతరేఖలు.

9. కింది వివరాలను తృప్తిపరిచే దీర్ఘవృత్త సమీకరణాలను $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ రూపంలో కనుక్కోండి.

(i) కేంద్రం = (2, –1); దీర్ఘాక్షం ఒక కొన = (2, –5), $e = \frac{1}{3}$

(ii) కేంద్రం = (4, –1); దీర్ఘాక్షం ఒక కొన (–1, –1) అయి (8, 0) గుండా పోతుంది.

(iii) కేంద్రం = (0, –3); $e = \frac{2}{3}$, అర్థ హ్రస్వాక్షం పొడవు = 5

(iv) కేంద్రం = (2, –1); $e = \frac{1}{2}$, నాభిలంబం పొడవు = 4

సాధన: **(i)** కేంద్రం = (2, –1) = (h, k)

దీర్ఘాక్షం ఒక కొన = B = (2, –5) = vertex

C, B ల x-అంతరఖండాలు ఒకటే కావడం వల్ల

$\overleftrightarrow{CA}$, y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

C, B లు దీర్ఘాక్షంపై వుంటాయని మనకి తెలుసు.

∴ దీర్ఘాక్షం y-అక్షానికి సమాంతరంగా వుంటుంది.

The ellipse is a vertical ellipse.

$$CB = b = \sqrt{(2-2)^2 + (-1+5)^2} = 4$$

$$e = \frac{1}{3} \text{ (దత్తాంశం)}$$

$$\therefore a^2 = b^2(1-e^2)$$

CB

$$\Rightarrow a^2 = 16\left(1-\frac{1}{9}\right) = 16 \times \frac{8}{9} = \frac{128}{9}$$

$$\therefore \text{ దీర్ఘవృత్తం } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{128}{9}} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{128} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1$$

(ii) దీర్ఘవృత్త కేంద్రం = C = (h, k) = (4, –1)

దీర్ఘాక్షం ఒక కొన = A = (–1, –1)

C, A ల y-అంతరఖండం ఒకటే కావడం వల్ల

$\overleftrightarrow{CA}$, x-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

C, A లు దీర్ఘాక్షంపై వుంటాయని మనకి తెలుసు.

∴ దీర్ఘాక్షం x-అక్షానికి సమాంతరంగా వుంటుంది.

$$\text{దూరం } CA = a = \sqrt{(4+1)^2 + (-1+1)^2} = 5$$

$$\therefore \text{ దీర్ఘ వృత్తం } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1 \quad \text{...............} (1)$$

ఇది (8, 0) గుండా పోతుంది.

$$\Rightarrow \frac{(8-4)^2}{25} + \frac{1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1^2}{b^2} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనకు కావలసిన దీర్ఘవృత్తం

$$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{25} + (y+1)^2 \times \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{25} + (y+1)^2 \times \frac{9}{25} = 1$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + 9(y+1)^2 = 25$$

(iii) కేంద్రం = (0, –3); $e = \dfrac{2}{3}$, అర్ధ హ్రస్వాక్షం = 5

<u>సందర్భం (i)</u> కేంద్రం = C = (h, k) = (0, –3)

అర్ధ హ్రస్వాక్షం పొడవు = $\dfrac{2b}{2} = b = 5$ (సమాంతర దీర్ఘవృత్తం)

$$e = \frac{2}{3} \Rightarrow b^2 = a^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow 25 = a^2\left(1-\frac{4}{9}\right) \Rightarrow 25 = a^2\left(\frac{5}{9}\right) \Rightarrow a^2 = 25 \times \frac{9}{5} = 45$$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్తం $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{45} + \dfrac{(y+3)^2}{25} = 1$.

<u>సందర్భం (ii)</u> కేంద్రం = C = (h, k) = (0, –3)

అర్ధ హ్రస్వాక్షం పొడవు = $a = 5$ (when the ellipse is a vertical ellipse)

$$e = \frac{2}{3} \Rightarrow a^2 = b^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow 25 = b^2\left(1-\frac{4}{9}\right) \Rightarrow b^2 = 45$$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్తం $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{45} = 1$.

(iv) కేంద్రం = (2, –1); $e = \dfrac{1}{2}$, నాభిలంబం పొడవు = 4

<u>సందర్భం (i)</u> కేంద్రం = C = (h, k) = (2, –1), $e = \dfrac{1}{2}$

నాభిలంబం పొడవు = $\dfrac{2b^2}{a} = 4$ (సమాంతర దీర్ఘవృత్తానికి)

$$\Rightarrow 2b^2 = 4a \Rightarrow b^2 = 2a$$

$$\Rightarrow a^2(1-e^2) = 2a \Rightarrow a\left(1-\frac{1}{4}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{4} = 2 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$$

$$\therefore b^2 = 2a = \frac{16}{3}$$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్తం $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{64}{9}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{16}{3}}=1$.

$$\Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{64}+\frac{3(y+1)^2}{16}=1$$

<u>సందర్భం (ii)</u> కేంద్రం = C = (h, k) = (2, –1), $e=\frac{1}{2}$

నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2a^2}{b}=4$ (for vertical ellipse)

$\Rightarrow 2a^2=4b \Rightarrow a^2=2b$

$\Rightarrow b^2(1-e^2)=2b \Rightarrow b\left(1-\frac{1}{4}\right)=2 \Rightarrow b=\frac{8}{3}$

$\therefore a^2=2b=\frac{16}{3}$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్తం $\frac{(x-2)^2}{\frac{16}{3}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{64}{9}}=1 \Rightarrow \frac{3(x-2)^2}{16}+\frac{9(y+1)^2}{64}=1$.

10. దీర్ఘవృత్తం $9x^2+16y^2=144$ యొక్క నాభుల గుండా పోతూ కనిష్ఠ వ్యాసార్ధం గల వృత్త వ్యాసార్ధం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త దీర్ఘవృత్తం $9x^2+16y^2=144$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

ఈ సమీకరణాన్ని ప్రామాణిక రూపం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ తో పోల్చగా

$a^2=16, b^2=9 \Rightarrow a=4, \quad b=3.$

$a>b \Rightarrow$ దీర్ఘవృత్తం సమాంతర దీర్ఘవృత్తం

$\Rightarrow b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow 9=16(1-e^2)$

$\Rightarrow \frac{9}{16}=1-e^2$

$\Rightarrow e^2=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

$\therefore$ నాభులు $S=(ae,0)=\left(\sqrt{7},\ 0\right)$, $S'=(-ae,0)=\left(-\sqrt{7},\ 0\right)$

$\therefore$ వృత్త వ్యాసపు కొనలు S, S' లు గా గల వృత్త సమీకరణం

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) + (y - 0)(y - 0) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2$$

$\therefore$ కావలసిన వ్యాసార్థం $\sqrt{7}$ యూనిట్లు.

11. దీర్ఘవృత్తం $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ పై బిందువులు 'α', 'β' లను కలిపే జ్యా సమీకరణం

$\dfrac{x}{a}\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + \dfrac{y}{b}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ అని చూపండి.

సాధన: దత్త వృత్తం $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

'α', 'β' లు దీర్ఘవృత్తంపై బిందువులు

P = (a cosα, b sinα), Q = (a cosβ, b sinβ)

$\therefore$ PQ జ్యా సమీకరణం $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$\Rightarrow y - b\sin\alpha = \frac{b\sin\beta - b\sin\alpha}{a\cos\beta - a\cos\alpha}(x - a\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow y - b\sin\alpha = \frac{b(\sin\beta - \sin\alpha)}{a(\cos\beta - \cos\alpha)}(x - a\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow y - b\sin\alpha = \frac{b.2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{a\left(-2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}(x - a\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow (y - b\sin\alpha) = -\frac{b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}(x - a\cos\alpha) \qquad \text{..........} (1)$$

$$\Rightarrow \frac{y - b\sin\alpha}{a} = -\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}(x - a\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{b}-\sin\alpha = -\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\frac{x}{a}-\frac{a\cos\alpha}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{b}-\sin\alpha\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{x}{a}-\cos\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= \cos\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ఇది 'α', 'β' బిందువులను కలిపే జ్యా సమీకరణం.

(లేదా)

Eq. (1) $$\Rightarrow (y-b\sin\alpha).\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{b} = \frac{-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{a}(x-a\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow (y-b\sin\alpha).\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{b} = \frac{-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{a}(x-a\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= \cos\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\therefore$ జ్యా సమీకరణం $\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. అందువల్ల నిరూపించడమైనది.

12. దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$ నాభి జ్యా అగ్రాల (శీర్షాలు కాని) ఉత్కేంద్రత కోణాలు θ_1, θ_2, ఉత్కేంద్రత e అయితే

(i) $e\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$ (ii) $\frac{e+1}{e-1}=\cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right).\cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$ అని చూపండి.

సాధన: **(i)** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తం నాభిజ్యా కొనలు $P(\theta_1)$, $Q(\theta_2)$.

నాభి = S = (ae, 0)

బిందువు $\theta_1 = P = (a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$

బిందువు $\theta_2 = Q = (a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$

ఇపుడు, P, S, Q లు సరేఖీయ బిందువులు.

$\Rightarrow$ SP వాలు = SQ వాలు

$$\Rightarrow \frac{b\sin\theta_1-0}{a\cos\theta_1-ae}=\frac{b\sin\theta_2-0}{a\cos\theta_2-ae}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}.\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1-e}=\frac{b}{a}\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2-e}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_1(\cos\theta_2-e)=\sin\theta_2(\cos\theta_1-e)$$

$$\Rightarrow \sin\theta_1\cos\theta_2-e\sin\theta_1=\sin\theta_2\cos\theta_1-e\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow e\sin\theta_2-e\sin\theta_1=\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1$$

$$\Rightarrow e[\sin\theta_2-\sin\theta_1]=\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$\Rightarrow e.2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right).\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right).$$

(ii) $\frac{e+1}{e-1}=\cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right).\cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$

పై నిరూపణ (i) నుండి $e\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$

$$\Rightarrow e=\frac{\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$

$$\therefore \frac{e+1}{e-1} = \frac{\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}+1}{\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}-1} = \frac{\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}}{\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}}$$

$$= \frac{\cos\left(\dfrac{\theta_1}{2}-\dfrac{\theta_2}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta_1}{2}-\dfrac{\theta_2}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}\right)} = \frac{2\cos\left(\dfrac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta_2}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta_2}{2}\right)}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B \\ \cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A\sin B\end{array}\right\}$$

$$= \cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right).\cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

$\therefore \dfrac{e+1}{e-1} = \cot\left(\dfrac{\theta_1}{2}\right).\cot\left(\dfrac{\theta_2}{2}\right)$. అందువల్ల నిరూపించడమైనది.

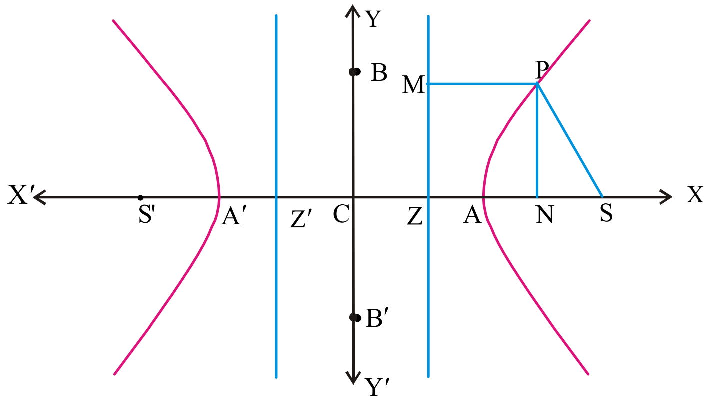
❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **5**

అతిపరావలయం

- ఉత్కేంద్రత విలువ ఒకటి కంటే ఎక్కువ ఉన్న శాంకవాన్ని అతిపరావలయం అంటారు.
- ఒక స్థిర బిందువు నుంచి, ఒక స్థిర సరళరేఖ నుంచి గల దూరాల నిష్పత్తి 1 కంటే ఎక్కువ అయ్యేటట్లు చలించే బిందువు పథాన్ని 'అతిపరావలయం' అంటాం.
- స్థిర బిందువును నాభి, స్థిర సరళరేఖను నియతరేఖ, స్థిర నిష్పత్తిని ఉత్కేంద్రత అని అంటాం.
- ప్రామాణిక రూపంలో అతిపరావలయ సమీకరణం

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ఇక్కడ $b^2=a^2\left(e^2-1\right)$, e > 1



వక్రం స్వభావం (Trace of the Curve)

అతిపరావలయ ప్రామాణిక రూపం $S=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, ఇక్కడ a > 0, b > 0, $b^2=a^2(e^2-1)$

(i) అతిపరావలయం x-అక్షాన్ని A(a, 0), A[1]($-a$, 0) ల వద్ద ఖండిస్తుంది.

(ii) $x=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{-b^2} \Rightarrow$ అతిపరావలయం y-అక్షాన్ని ఖండించదు.

(iii) $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x^2-a^2,\geq 0 \qquad \Rightarrow x\leq -a$ or $\geq a$

$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2} \Rightarrow y\to\pm\infty$ ఇక్కడ $x\to\pm\infty$

$x=-a$, $x=a$ ఊర్ధ్వ రేఖల మధ్య వక్రం ఉండదు.

కాబట్టి y అని వాస్తవ విలువలకు x వాస్తవం. $\Rightarrow$ప్రతి క్షితిజ సమాంతర రేఖ $y=k$ అతిపరావలయాన్ని ఖచ్చితంగా రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది.

$\because x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\pm\infty$

(iv) ప్రతి y విలువకు అనుగుణంగా సమాన పరిమాణం, వ్యతిరేక సంజ్ఞలు గల రెండు విలువలు ఉంటాయి.

$\therefore$ వక్రం Y-అక్షానికి సౌష్ఠవంగా ఉంటుంది.

$\therefore$ వక్రానికి అనంతంగా రెండు సౌష్ఠవ రేఖలు ఉంటాయి.

(v) X-అక్షంపై గల రేఖాఖండం $\overline{AA^1}$ ను అతిపరావలయ తిర్యక్ అక్షం అంటారు. Y-అక్షంపై గల రేఖాఖండం $\overline{BB^1}$ ను అతిపరావలయ సంయుగ్మాక్షం అంటారు.

$BC = B^1C=b=a\sqrt{e^2-1}$ గా గల Y-అక్షంపై బిందువులు B, B' .

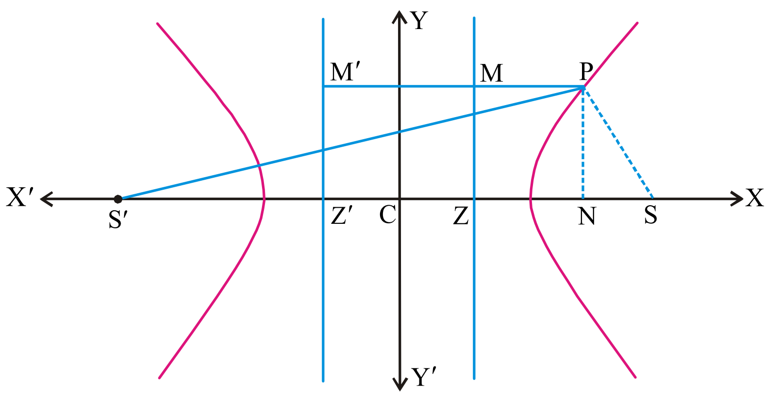
(vi) అక్షాలతో వక్రం సౌష్ఠవంగా ఉంటుంది. కాబట్టి దీర్ఘవృత్తంలో లాగే అతిపరావలయానికి రెండు నాభులు $S=(ae,0)$, $S'=(-ae,0)$, రెండు నియతరేఖలు $x=\pm\frac{a}{e}$ ఉంటాయి.

(vii) C ని అతిపరావలయ కేంద్రం అంటాం. కేంద్రం తిర్యక్ అక్షం, సంయుగ్మాక్షాల ఖండన బిందువు. అతిపరావలయంలో కేంద్రంగుండా పోయే ప్రతి జ్యాను కేంద్రం సమద్విఖండనం చేస్తుంది.

సిద్ధాంతం

అతిపరావలయం పై ఏదైనా బిందువు నాభిదూరాల భేదం స్థిరం.

ఉపపత్తి: మూలబిందువు కేంద్రం C గాను, నాభులు S, S'లు గాను, నియతరేఖలు $\overleftrightarrow{ZM}$, $\overleftrightarrow{Z'M'}$ లు గా గల అతిపరావలయంపై $P(x,y)$ బిందువు అనుకొనుము.



P నుంచి X-అక్షం, నియతరేఖల పైకి గీసిన లంబాలు వరసగా PN, PM, PM′ అనుకొనుము.

అప్పుడు, SP = e(PM) = e(NZ) = e(CN–CZ) = $e\left(x-\frac{a}{e}\right)=ex-a$.

S′P = e(PM′) = e(NZ′) = e(CN + CZ′) = $e\left(x+\frac{a}{e}\right)=ex+a$.

$\therefore S'P-SP=(ex+a)-(ex-a)=2a=$ స్థిరం.

$\therefore$ అతిపరావలయం పై ఏదైనా బిందువు నాభిదూరాల భేదం స్థిరం.

గమనిక: పై సిద్ధాంతం దృష్ట్యా కొన్నిసార్లు అతిపరావలయాన్ని రెండు స్థిర బిందువుల నుంచి దూరాల భేదం స్థిరంగా ఉండే బిందుపథంగా కూడా నిర్వచిస్తారు.

సంకేతం

$$S=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1 \qquad S_1=\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}-1$$

$$S_{11}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1 \qquad S_{12}=\frac{x_1x_2}{a^2}-\frac{y_1y_2}{b^2}-1$$

అతిస్వల్ప సమాధాన తరహా ప్రశ్నలు

లంబ అతిపరావలయం (Definition Rectangular Hyperbola)

ఒక అతిపరావలయంలో తిర్యక్ అక్షం పొడవు (2a), సంయుగ్మాక్షం పొడవు (2b) సమానం అయితే అతిపరావలయాన్ని లంబఅతిపరావలయం అంటాం. దాని సమీకరణం $x^2+y^2=a^2$.

$b=a \Rightarrow a^2=a^2(e^2-1)\Rightarrow e^2-1=1\Rightarrow e^2=2\Rightarrow e=\sqrt{2}$

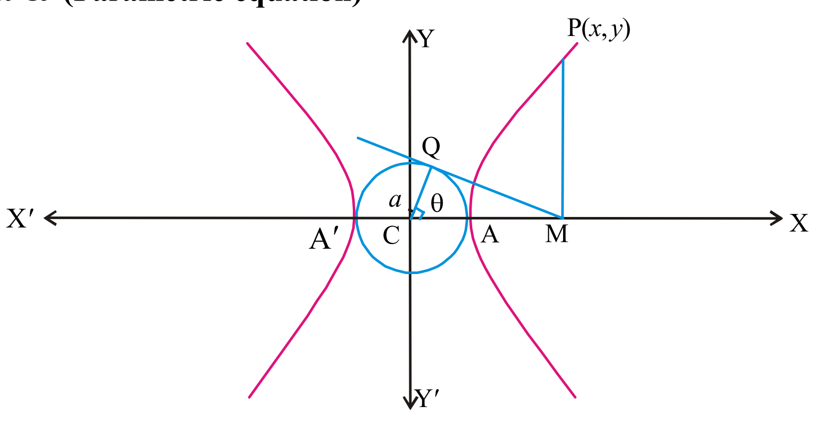
$\therefore$ లంబ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత $\sqrt{2}$.

అనుబంధ వృత్తం (Auxiliary Circle)

తిర్యక్ అక్షం వ్యాసంగా గల వృత్తాన్ని అతిపరావలయ అనుబంధ వృత్తం (సహాయ వృత్తం) అంటాం.

$\therefore$ S = 0 అతిపరావలయ అనుబంధ వృత్త సమీకరణం $x^2+y^2=a^2$.

పరామితీయ సమీకరణాలు (Parametric equation)



S = 0 అతిపరావలయ సమీకరణం అనుకొనుము. అపుడు అనుబంధ వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 = a^2$.

అతిపరావలయంపై $P(x, y)$ ఏదైనా బిందువు. కేంద్రం C అనుకొనుము.

తిర్యక్ అక్షంపై P లంబపాదం M అనుకొందాం. M నుంచి అనుబంధ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ QM ను గీద్దాం. $\angle MCQ = \theta$ అయితే

$\boxed{\begin{array}{l} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{array}}$ లు అతిపరావలయ S = 0 యొక్క పరామితీయ సమీకరణాలు.

$$\theta \in [0, 2\pi),\ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

సంయుగ్మ అతిపరావలయం (Conjugate Hyperbola)

దత్త అతిపరావలయం తిర్యక్, సంయుగ్మాలు వరసగా సంయుగ్మ, తిర్యక్ అక్షాలుగా గల అతిపరావలయాన్ని దత్త అతిపరావలయం సంయుగ్మ అతిపరావలయం అంటాం.

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ యొక్క సంయుగ్మ అతిపరావలయం $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

$S = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ మరియు $S' = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ అయితే, అపుడు

ఒకదానికి ఇంకొకటి సంయుగ్మ అతిపరావలయాలు.

సమస్యలు

అతిస్వల్ప సమాధాన తరహా ప్రశ్నలు

1. ఉత్కేంద్రత $\dfrac{3}{2}$, ఒక నాభి (1, –3), అనురూప నియతరేఖ y = 2 గా గల అతిపరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: శాంఖవ నిర్వచనం నుండి $\dfrac{SP}{PM} = e$.

$S = (1, -3),\ e = \dfrac{3}{2}$, నియతరేఖ $y - 2 = 0$ అనుకొనుము.

అతిపరావలయంపై $P(x_1, y_1)$ ఏదైనా బిందువు.

అతిపరావలయ నిర్వచనం ప్రకారం $\dfrac{SP}{PM} = e$

ఇక్కడ, PM = P నుంచి నియతరేఖకు గల లంబదూరం

$\Rightarrow SP = e\ PM$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1-1)^2+(y_1+3)^2} = \frac{3}{2}\left|\frac{y_1-2}{\sqrt{0^2+1^2}}\right|$$

ఇరువైపులా వర్గంచేయగా,

సూత్రం:- $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ఇక్కడ $ax+by+c=0$

$\Rightarrow\ o.x+1.y-2=0$

$$(x_1-1)^2+(y_1+3)^2 = \frac{9}{4}(y_1-2)^2$$

$$\Rightarrow x_1^2+1-2x_1+y_1^2+9+6y_1 = \frac{9}{4}(y_1^2+4-4y_1)$$

$$\Rightarrow 4(x_1^2+y_1^2-2x_1+6y_1+10) = 9y_1^2+36-36y_1$$

$$\Rightarrow 4x_1^2+4y_1^2-8x_1+24y_1+40-9y_1^2-36+36y_1=0$$

$$\Rightarrow 4x_1^2-5y_1^2-8x_1+60y_1+4=0$$

$\therefore$ $P(x_1y_1)$ బిందుపథం $4x^2-5y^2-8x+60y+4=0$, కావలసిన అతిపరావలయం.

2. ఒక అతిపరావలయ ఉత్కేంద్రత $\dfrac{5}{4}$ అయితే దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయ ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

సాధన: ఒక అతిపరావలయం, సంయుగ్మ అతిపరావలయాల ఉత్కేంద్రతలు వరసగా e, e' అయితే

$\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{(e')^2}=1$ అని మనకు తెలుసు.

దత్తాంశం $e=\dfrac{5}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}+\frac{1}{(e')^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(e')^2}+=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{(e')^2}{1}=\frac{25}{9}\Rightarrow e'=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

= సంయుగ్మ అతిపరావలయ ఉత్కేంద్రత.

స్వల్ప సమాధాన తరహా ప్రశ్నలు

1. ఒక అతిపరావలయం, సంయుగ్మ అతిపరావలయాల ఉత్కేంద్రతలు వరసగా e, e_1 అయితే $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_1^2}=1$ అని చూపండి.

సాధన: అతిపరావలయం $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ అనుకొనుము. ___ (1)

దీని ఉత్కేంద్రత 'e' = $b^2=a^2(e^2-1) \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=e^2-1$

$$\Rightarrow e^2=1+\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2} \quad \text{\_\_\_ (2)}$$

(1) యొక్క సంయుగ్మ అతిపరావలయ సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

దీని ఉత్కేంద్రత e_1 = $a^2=b^2(e_1^2-1)$

$$\Rightarrow e_1^2-1=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow e_1^2=1+\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2+a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e_1^2}=\frac{b^2}{a^2+b^2} \quad \text{\_\_(3)}$$

(2), (3) ల నుంచి

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_1^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$. అందుచేత నిరూపితమైనది.

2. కింది అతిపరావలయాలకు ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియతరేఖ సమీకరణాలు, కేంద్రం, నాభిలంబం పొడవు కనుక్కోండి.

(i) $16y^2-9x^2=144$

(ii) $9x^2-16y^2+72x-32y-16=0$

సాధన: (i) దత్త అతిపరావలయం $16y^2-9x^2=144$

$$\Rightarrow 9x^2 - 16y^2 = -144$$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{-144}{144}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$$

ఇది (0, 0) కేంద్రంగా కలిగిన అతిపరావలయం మరియు దాని తిర్యక్ అక్షం y-అక్షం.

కనక, $a^2 = b^2(e^2 - 1)$, ఇక్కడ $a^2 = 16, b^2 = 9$

$\Rightarrow 16 = 9(e^2 - 1)$ $\qquad a = 4, \; b = 3$

$$\Rightarrow e^2 - 1 = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{5}{3}}$$

$\therefore$ కేంద్రం = (0, 0)

నాభులు $= (0, \pm\, be) = (0, \pm\, 5)$

ఉత్కేంద్రత e = $\frac{5}{3}$

నాభిలంబం పొడవు = $\frac{2a^2}{b} = \frac{32}{3}$

నియతరేఖల సమీకరణాలు = $y = \pm \frac{b}{c}$

$$\Rightarrow y = \pm\, \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow 5y \pm 9 = 0$$

(ii) దత్త అతిపరావలయం $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

$$\Rightarrow (9x^2 + 72x) - (16y^2 + 32y) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (9x^2 + 8x) - 16(y^2 + 2y) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 9[x^2 + 2.x.4] - 16[y^2 + 2.y.1] = 16$$

$$\Rightarrow 9[x^2 + 2.x.4 + 4^2 - 4^2] - 16[y^2 2.y.1 + 1^2 - 1^2] = 16$$

$$\Rightarrow 9[(x^2+4)-16]-16[(y+1)^2-1]=16$$
$$\Rightarrow 9(x+4)^2-144-16(y+1)^2+16=16$$
$$\Rightarrow 9(x+4)^2-16(y+1)^2=144$$
$$\Rightarrow \frac{9(x+4)^2}{144}-\frac{16(y+1)^2}{144}=1$$
$$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

ఈ సమీకరణాన్ని $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ తో పోల్చగా

$h=-4,\ k=-1,\ a=4,\ b=3,\ b^2=a^2(e^2-1)$

$$\Rightarrow e^2-1=\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{16}$$

$\therefore$ కేంద్రం $=(h,k)=(-4,-1)$

$$\Rightarrow e^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$$

నాభులు $=(h\pm ae,k)=(-4\pm 5,-1)$

$$\Rightarrow e=\frac{5}{4}$$

$= (-4+5,-1),\ (-4-5,-1)$

$= (1,-1),\ (-9,-1)$

ఉత్కేంద్రత $e=\frac{5}{4}$

నియతరేఖల సమీకరణాలు : $x-h=\pm\frac{a}{e}$

$$\Rightarrow x+4=\pm\frac{16}{5}$$
$$\Rightarrow 5x+20=\pm 16$$
$$\Rightarrow 5x+20=16,\ 5x+20=-16$$
$$\Rightarrow 5x+4=0,\ 5x+36=0$$

నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$.

3. ఉత్కేంద్రత 2, నాభులు (4, 2), (8, 2) గా గల అతిపరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: అతిపరావలయ నాభులు S = (4, 2), $S'=(8,2)$, నాభుల y-నిరూపకాలు సమానం.

$\overleftrightarrow{SS'}$, X-అక్షానికి సమాంతరంగా కలదు.

$\Rightarrow$ తిర్యక్ అక్షం X-అక్షానికి సమాంతరంగా కలదు.

$\Rightarrow$ అతిపరావలయ సమీకరణం

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \_\_\_ (1)$$

కేంద్రం = C = (h,k) = SS$'$ మధ్య బిందువు $=\left(\frac{4+8}{2},\frac{2+2}{2}\right)$

$=(6,2)$

$\Rightarrow h=6, k=2$

నాభుల మధ్య దూరం = SS' = $\sqrt{(8-4)^2+(2-2)^2}=4$

e = 2 (దత్తాంశం) $\Rightarrow 2ae=4$

$\Rightarrow 2.a.2=4$

$\Rightarrow a=1$

$b^2=a^2(e^2-1)$

$=1(4-1)+3$

$\therefore$ అతిపరావలయం

$$\frac{(x-6)^2}{1^2}-\frac{(y-2)^2}{3}=1$$

$$\Rightarrow \frac{3(x-6)^2-(y-2)^2}{3}=1$$

$\Rightarrow 3(x^2+36-12x)-(y^2+4-4y)=3$

$\Rightarrow 3x^2-y^2-36x+4y+101=0$

4. తిర్యక్ అక్షం పొడవు 6 గా కలిగి కేంద్రం, నాభులను కలిపే రేఖాఖండానికి శీర్షం మధ్య బిందువుగా గల అతిపరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: అతిపరావలయం $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ అనుకొనుము.

తిర్యక్ అక్షం పొడవు = $2a=6$ (దత్తాంశం)

$\Rightarrow \boxed{a=3}$

కేంద్రం, నాభులను కలిపే రేఖాఖండానికి శీర్షం మధ్యబిందువు

$\Rightarrow$ శీర్షం = CS మధ్యబిందువు.

ఇక్కడ C = (0, 0), నాభి = S = (ae, 0), శీర్షం = (a, 0)

$$\Rightarrow (a,0)=\left(\frac{0+ae}{2},\frac{0+0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{ae}{2} \Rightarrow \boxed{e = 2}$$

ఇపుడు $b^2 = a^2(e^2 - 1) = 9(4-1) = 27$.

5. $3x - 4y = 12$, $3x + 4y = 12$ సరళరేఖలు అతిపరావలయం S = 0 పై ఖండించుకుంటే S = 0 ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

సాధన: $3x - 4y = 12$, $3x + 4y = 12$ సరళరేఖలు అతిపరావలయం S = 0 పై ఖండించుకుంటున్నాయి.

సరళరేఖల ఉమ్మడి సమీకరణం $(3x - 4y)(3x + 4y) = 12 \times 12$

$$\Rightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$. ఇది అతిపరావలయాన్ని సూచిస్తుంది.

$\therefore b^2 = a^2(e^2 - 1)$ ఇక్కడ $a^2 = 16$, $b^2 = 9$

$$\Rightarrow 9 = 16(e^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} = e^2 - 1 \quad \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ 6

సమాకలనం

అవకలనానికి విలోమ ప్రక్రియే సమాకలనం. ఒక ప్రమేయపు అవకలజం తెలిస్తే, ఆ ప్రమేయాన్ని కనుగొనే ప్రక్రియను సమాకలనం అని అంటారు.

నిర్వచనము : $\mathbf{R}$ లో E ఒక ఉప సమితి. దీనిలో ప్రతి బిందువుకు ఒక కుడి సామీప్యం లేదా ఎడమ సామీప్యంగాని E లో ఉంటుందనుకొందాం. $f: \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{R}$ ఒక ప్రమేయం. E మీద ఒక ప్రమేయం F, ప్రతి $x \in \mathrm{E}$ కి $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.అంటే E మీద F కు f అవకలని అయ్యేటట్లు ఉండే F ని f కి ప్రత్యవకలజం లేదా f యొక్క పూర్వగం అంటాం.

అనిశ్చిత సమాకలని : $f: \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{R}$ అనుకొందాం. I మీద f కు F ఒక ప్రత్యవకలజం అనుకొందాం. అపుడు I మీద f కు సమాకలని ఉందని అంటాం. ప్రతి వాస్తవ స్థిరసంఖ్య c కి F + c అని I మీద f కు 'అనిశ్చిత సమాకలని' అంటాం. దీనిని $\int f(x)dx$ తో సూచిస్తాం. 'ఇంటెగ్రల్ (integral) $f(x)\, dx$' అని చదువుతాం. $\int f(x)dx$ ని $\int f$ తో కూడా సూచిస్తాం.

అందువల్ల, $\int f = \int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + c$.

ఇక్కడ 'c' ని 'సమాకలన స్థిరాంకం' అంటాం.

అనిశ్చిత సమాకలని $\int f(x)dx$ లో 'f' ను 'సమాకల్యం' అనీ, 'x' ను 'సమాకలన చలరాశి' అనీ అంటాం.

గమనిక: (i) $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)dx\right] = f(x)$

(ii) $\int f'(x)\, dx = f(x) + c$, 'c' సమాకలన స్థిరాంకం.

$$\int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + c$$

(iii) $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)+c\right] = g(x) \Rightarrow \int g(x)dx = f(x) + c \Rightarrow \int \dfrac{d}{dx}\left[f(x)+c\right]dx = f(x) + c$

(iv) $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$

ప్రామాణిక సూత్రాలు

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$ $\qquad$ $\int dx = \int 1.dx = x + c$

$\int x.dx = \frac{x^2}{2} + c$ $\qquad$ $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$ $\qquad$ $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$

$\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + c$

3. $\int a^x .dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1$

4. $\int e^x dx = e^x + c$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

7. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

8. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

9. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

10. $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

ఉదాహరణలు

(i) $d(x^2) = 2x\, dx$ $\qquad$ (ii) $d(t^2) = 2t\, dt$

(iii) $d(x^3 y^3) = x^3.3y^2\, dy + y^3.3x^2\, dx$ $\qquad$ (iv) $d\left(\frac{x^3}{y^3}\right) = \frac{y^3.3x^2\, dx - x^3.3y^2\, dy}{\left(y^3\right)^2}$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c = -\cos^{-1} x + c$ $\qquad$ $\left(\because \cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}\right)$

12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c = -\cot^{-1} x + c$ $\qquad$ $\left(\because \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}\right)$

13. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c = -\operatorname{cosec}^{-1} x + c$ $\qquad$ $\left(\because \sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}\right)$

14. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$

15. $\int \cosh x = \sinh x + c$

16. $\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + c$

17. $\int \operatorname{cosech}^2 x = -\coth x + c$

18. $\int \operatorname{sech} x.\tanh x\, dx = -\operatorname{sech} x + c$

19. $\int \operatorname{cosech} x.\coth x\, dx = -\operatorname{cosech} x + c$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1} x + c = \log_e\left[x + \sqrt{x^2+1}\right] + c$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \cosh^{-1} x + c = \log_e \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c$

22. $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \tanh^{-1} x + c = \coth^{-1} x + c$

23. $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx + c$

24. $\int a.f(x)\,dx = a\int f(x).dx + c$ where $a \in \mathbf{R}$

ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సమాకలనం

సూత్రాలు

1. $\int f'[g(x)].g'(x).dx = f[g(x)] + c$

2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$

3. $\int [f(x)]^n .f'(x).dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$

4. $\int f(x).f'(x).dx = \frac{[f(x)]^2}{2} + c$

5. $\int \sqrt{f(x)}.f'(x).dx = \frac{[f(x)]^{3/2}}{3/2} + c$

6. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

7. $\int f'(ax+b)\,dx = \frac{f(ax+b)}{a} + c$

8. $\int \frac{f^1(x)}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{f(x)} + c$

9. $\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + c = -\log|\cos x| + c$

10. $\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + c$

11. $\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + c = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + c\right|$

12. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c = -\log|\operatorname{cosec} x + \cot x| + c$

13. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

14. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

15. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c = \log[x+\sqrt{a^2+x^2}]+c$

17. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

19. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

20. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

21. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

ఉదాహరణలు

1. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \log\left|e^x+1\right|+c$

2. $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\log|ax+b|}{a}+c,\ \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}+c,\ \int \frac{1}{3-8x}\,dx = \frac{\log|3-8x|}{-8}+c$

3. $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}+c,\quad \int e^{-x}\,dx = \frac{e^{-x}}{-1}+c$

4. $\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a}+c,\ \int \sin(9x)\,dx = \frac{-\cos(9x)}{9}+c$

5. $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a}+c,\ \int \cos(2x)\,dx = \frac{\sin(2x)}{2}+c$

6. $\int (2+3x)^n\,dx = \frac{\frac{(2+3x)^{n+1}}{n+1}}{3}+c,\ \int (2+3x)^4\,dx = \frac{\frac{(2+3x)^5}{5}}{3}+c$

7. $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \dfrac{\tan(ax+b)}{a} + c$

8. $\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)\,dx = \dfrac{-\cot(ax+b)}{a} + c$

9. $\int \operatorname{cosec}(ax+b).\cot(ax+b)\,dx = \dfrac{-\operatorname{cosec}(ax+b)}{a} + c$

10. $\int \sec(ax+b).\tan(ax+b)\,dx = \dfrac{\sec(ax+b)}{a} + c$

11. $\int \sqrt{7-5x}\,dx = \dfrac{\dfrac{(7-5x)^{3/2}}{3/2}}{-5} + c$ $\qquad \left[\because \int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2}\right]$

12. $\int \dfrac{1}{\sqrt{3-9x}}\,dx = \dfrac{2\sqrt{3-9x}}{-9} + c$ $\qquad \left[\because \int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\right]$

13. $\int \dfrac{1}{4-\dfrac{5x}{7}}\,dx = \dfrac{\log\left|4-\dfrac{5x}{7}\right|}{-\dfrac{5}{7}} + c$ $\qquad \left[\because \int \dfrac{1}{x}\,dx = \log x\right]$

14. $\int e^{3-\frac{2x}{5}}\,dx = \dfrac{e^{3-\frac{2x}{5}}}{-\dfrac{2}{5}} + c$ $\qquad \left[\because \int e^x\,dx = e^x\right]$

15. $\int \dfrac{1}{1+x}\,dx = \log|1+x| + c, \quad \int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$ (తేడాను గమనించండి)

సమస్యలు

1. $\int \cot^2 x\,dx$ ను కనుక్కోండి.

సాధన: $\int \cot^2 x\,dx = \int \left(\cos ec^2 x - 1\right) dx$

$= \int \cos ec^2 x.dx - \int 1.dx = -\cot x - x + c$

2. $\int \left(\dfrac{x^6-1}{1+x^2}\right) dx$ ను కనుక్కోండి.

సాధన: $\therefore \int \left(\dfrac{x^6-1}{1+x^2}\right) dx = \int \left\{(x^4 - x^2 + 1) + \dfrac{-2}{1+x^2}\right\} dx$

$= \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + x - 2\tan^{-1} x + c$

3. $\int(1-x)(4-3x)(3+2x)\,dx$ ను కనుక్కోండి.

సాధన: $(1-x)(4-3x)(3+2x)=(1-x)\left(12+8x-9x-6x^2\right)$

$$=(1-x)\left(12-x-6x^2\right)=12-x-6x^2-12x+x^2+6x^3=6x^3-5x^2-13x+12$$

$$\therefore\int(1-x)(4-3x)(3+2x)\,dx=\int(6x^3-5x^2-13x+12)\,dx$$

$$=6\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}-13\frac{x^2}{2}+12x=\frac{3x^4}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{13x^2}{2}+12x+c$$

4. $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ ను కనుక్కోండి.

సాధన: $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx=\int\sqrt{1+2\sin x\cos x}\,dx$

$$=\int\sqrt{(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cos x}\,dx=\int\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$$

$$=\int(\sin x+\cos x)\,dx=-\cos x+\sin x+c$$

5. $\int\frac{2x^3-3x+5}{2x^2}dx$, $x>0$ ను గణించి, ఫలితాన్ని అవకలనంతో సరిచూడండి.

సాధన: $\int\frac{2x^3-3x+5}{2x^2}dx=\int\left(\frac{2x^3}{2x^2}-\frac{3x}{2x^2}+\frac{5}{2x^2}\right)dx$

$$=\int\left(x-\frac{3}{2}.\frac{1}{x}+\frac{5}{2}x^{-2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\log|x|+\frac{5}{2}.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\log|x|+\frac{5}{2}.\frac{x^{-1}}{-1}+c$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\log|x|-\frac{5}{2}.\frac{1}{x}+c$$

సరిచూచుట:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\log|x|-\frac{5}{2}.\frac{1}{x}+c\right]$$

$$=\frac{2x}{2}-\frac{3}{2}.\frac{1}{x}-\frac{5}{2}(-x^{-1-1})=x-\frac{3}{2x}+\frac{5}{2x^2}$$

$$=\frac{x(2x^2)-3(x)+5}{2x^2}==\frac{2x^3-3x+5}{2x^2}$$. అందువల్ల సరిచూడడమైనది.

6. $\int \frac{x^2+3x-1}{2x} dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \frac{x^2+3x-1}{2x} dx = \int \left(\frac{x^2}{2x} + \frac{3x}{2x} - \frac{1}{2x} \right) dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2}.x + \frac{3}{2}.1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2}\int x.dx + \frac{3}{2}\int 1.dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}.dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\log|x| + c = \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\log|x| + c$$

7. $\int \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx = x + 2\log|x| - 3.\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = x + 2\log|x| + 3.\frac{1}{x} + c$

8. $\int \left(x + \frac{4}{1+x^2} \right) dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \left(x + \frac{4}{1+x^2} \right) dx = \int x.dx + 4\int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} + 4\tan^{-1} x + c$

9. $\int \left(e^x - \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \left(e^x - \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx = e^x - \log|x| + 2\cosh^{-1} x + c$

10. $\int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \tanh^{-1} x + \tan^{-1} x + c$

11. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$= \sin^{-1} x + 2\sinh^{-1} x + c$$

12. $\int e^{\log(1+\tan^2 x)}\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int e^{\log(1+\tan^2 x)}\, dx = \int e^{\log(\sec^2 x)}\, dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c \qquad \left(\because a^{\log_a x} = x\right)$

13. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos 2x} dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\int \tan^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sec^2 x - 1)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x\, dx - \frac{1}{2}\int 1.dx = \frac{1}{2}\tan x - \frac{1}{2}x + c$$

14. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^2}\right) dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^2}\right) dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - 2\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3}\int x^{-2}\, dx$

$$= 3.2\sqrt{x} - 2\log|x| + \frac{1}{3}\frac{x^{-2+1}}{(-2+1)} + c = 6\sqrt{x} - 2\log|x| + \frac{1}{3}.\frac{1}{x} + c$$

15. $\int \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)^2 dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)^2 dx = \int \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x^2} dx$

$$= \int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2x^{1/2}}{x^2}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-2} + 2.x^{\frac{1}{2}-2}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + x^{-2} + 2.x^{\frac{-3}{2}}\right) dx = \log|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 2.\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c$$

$$= \log|x| - \frac{1}{x} - 4.x^{-\frac{1}{2}} + c = \log|x| - \frac{1}{x} - \frac{4.}{\sqrt{x}} + c$$

16. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{3}{2x^2}\right) dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{3}{2x^2}\right) dx = 2\sqrt{x} + 2\cosh^{-1} x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)$

$$= 2\sqrt{x} + 2\cosh^{-1} x + \frac{3}{2x} + c$$

17. $\int\left(\cosh x+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int\left(\cosh x+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\sinh x+\sinh^{-1}x+c$

18. $\int\left(\sinh x+\frac{1}{\left(x^2-1\right)^{1/2}}\right)dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int\left(\sinh x+\frac{1}{\left(x^2-1\right)^{1/2}}\right)dx=\int\sinh x\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$$=\cosh x+\cosh^{-1}x+c$$

19. $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx=\int\frac{a^{2x}+b^{2x}-2a^xb^x}{a^xb^x}dx$

$$=\int\left(\frac{a^{2x}}{a^xb^x}+\frac{b^{2x}}{a^xb^x}-\frac{2a^xb^x}{a^xb^x}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{a^x}{b^x}+\frac{b^x}{a^x}-2\right)dx\ =\int\frac{a^x}{b^x}dx+\int\frac{b^x}{a^x}dx-2\int 1.dx$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\log_e\left(\frac{a}{b}\right)}+\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\log_e\left(\frac{b}{a}\right)}-2x+c$$

20. $\int\sec^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int\sec^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx=\int(1+\tan^2 x)(\mathrm{cosec}^2 x)\,dx$

$$=\int(\mathrm{cosec}^2 x+\tan^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x)\,dx$$

$$=\int(\mathrm{cosec}^2 x+\sec^2 x)\,dx$$

$$=-\cot x+\tan x+c$$

మరొక పద్ధతి:

$$\int\sec^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad \left(\because \sin^2 x+\cos^2 x=1\right)$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x.\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x.\sin^2 x} dx$$

$$= \left(\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x.\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x.\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \left(\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \left(\int \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \right) dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

21. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\sin^2 x} dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x + \frac{1}{2}\cot^2 x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x \right) dx = \frac{1}{2}\int \left(\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x - 1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(2\operatorname{cosec}^2 x - 1 \right) dx = \frac{1}{2}\left[2(-\cot x) - x \right]$$

$$= -\cot x - \frac{x}{2} + c$$

22. $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2\sin^2 x}\, dx$

$$= \int \sqrt{2}\sin x\, dx = \sqrt{2}(-\cos x) = -\sqrt{2}\cos x + c$$

23. $\int \frac{1}{\cosh x + \sinh x} dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \frac{1}{\cosh x + \sinh x} dx = \int \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh x + \sinh x} dx \qquad (\because \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1)$

$$= \int \frac{(\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x)}{\cosh x + \sinh x} dx$$

$$= \int (\cosh x - \sinh x)\, dx = \sinh x - \cosh x + c$$

24. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x} dx$

$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx$

$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x \sin x} \right) dx$

$= \int \left(\text{cosec}^2 x - \cot x . \text{cosec}\, x \right) dx$

$= -\cot x + \text{cosec}\, x + c$

గమనిక: $\int \frac{1}{1-\cos x} dx, \int \frac{1}{1-\sin x} dx, \int \frac{1}{1+\sin x} dx$ లను గణించడానికి ఈ విధమైన పద్ధతి ఉపయోగించవచ్చు.

ప్రతిక్షేపణ ద్వారా సమాకలనం

క్రింది సమాకలనలను గణించండి.

1. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

సాధన: $e^x + 1 = t$ అనుకొనుము. $\Rightarrow e^x.dx = dt.$

$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t} dt$

$= \log|t| = \log|e^x+1| + c$

(లేదా) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)|$

$f(x) = e^x + 1$ అనుకొంటే $\Rightarrow f'(x) = e^x$

$\therefore \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| = \log|e^x+1| + c$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx$

సాధన: $\sqrt{1-x} = t$ అనుకొనుము. $\Rightarrow 1-x = t^2 \Rightarrow -dx = 2t\, dt \Rightarrow x = 1-t^2$

$\therefore \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{(1-t^2)^2}{t}(-2t)dt$

$= -2\int (1-t^2)^2\, dt = -2\int (1+t^4-2t^2)\, dt = -2\left[t + \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} \right] = -2t - \frac{2}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3$

$= -2\sqrt{1-x} - \frac{2}{5}(\sqrt{1-x})^5 + \frac{4}{3}(\sqrt{1-x})^3 + c$

3. $\int \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

సాధన: $\sin^{-1}(x) = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$

$$\therefore \int (\sin^{-1} x)^2 . \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} = \frac{(\sin^{-1} x)^3}{3} + c \quad \text{(or)}$$

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} \quad \text{where } f(x) = \sin^{-1}(x),\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \int (\sin^{-1} x)^2 . \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(\sin^{-1} x)^{2+1}}{2+1} = \frac{(\sin^{-1} x)^3}{3} + c$$

4. $\int \frac{1}{1+(2x+1)^2} dx$.

సాధన: $2x+1 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 2.1.dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

$$\int \frac{1}{1+(2x+1)^2} dx = \int \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \tan^{-1} t = \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) + c \quad \text{(or)}$$

$$\int f'(ax+b)\, dx = \frac{f(ax+b)}{a}$$

$$\therefore \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \Rightarrow \int \frac{1}{1+(ax+b)^2} dx = \frac{\tan^{-1}(ax+b)}{a}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+(2x+1)^2} dx = \frac{\tan^{-1}(2x+1)}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) + c$$

5. $\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx$.

సాధన: $x^6 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 6.x^5 dx = dt \Rightarrow x^5 dx = \frac{dt}{6}$

$$\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx = \int \frac{x^5 dx}{1+(x^6)^2} dx = \int \frac{\frac{dt}{6}}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{6} \tan^{-1} t = \frac{1}{6} \tan^{-1}(x^6) + c$$

6. $\int \cos^3 x \sin x \, dx$.

సాధన: $\cos x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow \sin x dx = -dt$

$$\therefore \int \cos^3 x \sin x \, dx = \int t^3(-dt)$$

$$= -\int t^3 dt = -\left(\frac{t^4}{4}\right) = -\frac{(\cos x)^4}{4} = -\frac{\cos^4 x}{4} + c$$

7. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right).e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx$

సాధన: $x+\frac{1}{x} = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx = dt$

$$\therefore \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right).e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx = \int e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx \ = \int e^t.dt = e^t = e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} + c$$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{\sin^{-1} x}\sqrt{1-x^2}} dx$

సాధన: $\sin^{-1} x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{\sin^{-1} x}\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\sin^{-1} x}}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}}.dt = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{\sin^{-1} x} + c$$

9. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$

సాధన: $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}.\frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$= \int \tan^4 x.\sec^2 x \, dx \qquad \int [f(x)]^n.f'(x).dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{\tan^{4+1} x}{4+1} = \frac{\tan^5 x}{5} + c$$

10. $\int \sin^2 x \, dx$

సాధన: $\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx \ = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1.dx - \int \cos 2x.dx\right] \ = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right] + c$$

11. $\int \frac{1}{a\sin x + b\cos x}dx$

సాధన: $\int \frac{1}{a\sin x + b\cos x}dx = \int \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\sin x + b\cos x)}dx$

Let $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\sin x + b\cos x)}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right]}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\left(\frac{1}{\cos\theta\sin x + \sin\theta\cos x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{1}{\sin(x+\theta)}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \operatorname{cosec}(x+\theta)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log|\operatorname{cosec}(x+\theta). - \cot(x+\theta)| + c$$

12. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+5}}dx$

సాధన: $\sqrt{x+5} = t$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow x+5 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt,\ x = t^2 - 5 \Rightarrow x^2 = (t^2-5)^2 = t^4 + 25 - 10t^2$

$$\therefore \int \frac{x^2}{\sqrt{x+5}}dx = \int \frac{t^4+25-10t^2}{t}.2t\,dt$$

$$= 2\int (t^4+25-10t^2).dt \ = 2\left[\frac{t^5}{5} + 25t - \frac{10t^3}{3}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\left(\sqrt{x+5}\right)^5}{5} + 25\sqrt{x+5} - \frac{10\left(\sqrt{x+5}\right)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} + 50(x+5)^{1/2} - \frac{20}{3}(x+5)^{3/2} + c$$

13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

సాధన: $x=\sin\theta$ అనుకొనుము $\Rightarrow dx=\cos\theta\, d\theta,\ \theta=\sin^{-1}x$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\int \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta=\int \sin^2\theta\, d\theta$$

$$=\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta=\frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}\right]$$

$$=\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \ =\frac{\sin^{-1}x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\ =\frac{\sin^{-1}x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+c$$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$

సాధన: $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{2^2-(3x)^2}}\,dx$ $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$=\frac{\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)}{3}=\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)+c$$

15. $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

సాధన: $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx=\int \frac{1}{1^2+(2x)^2}\,dx$ $\qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$=\frac{\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1}\right)}{2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+c$$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

సాధన: $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx\ =\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$ $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

17. $\int \sqrt{4x^2+9}\, dx$

సాధన: $\int \sqrt{4x^2+9}\, dx = \int \sqrt{(2x)^2+3^2}\, dx \qquad \because \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$= \frac{\frac{2x}{2}\sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4}\sinh^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$$

18. $\int \sqrt{9x^2-25}\, dx$

సాధన: $\int \sqrt{9x^2-25}\, dx = \int \sqrt{(3x)^2-5^2}\, dx \qquad \because \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$= \frac{\frac{3x}{2}\sqrt{9x^2-25} - \frac{25}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right)}{3}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{9x^2-25} - \frac{25}{6}\cosh^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) + c$$

19. $\int \sqrt{16-25x^2}\, dx$

సాధన: $\int \sqrt{16-25x^2}\, dx = \int \sqrt{4^2-(5x)^2}\, dx \qquad \because \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$= \frac{\frac{5x}{2}\sqrt{16-25x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\left(\frac{5x}{4}\right)}{5}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{16-25x^2} + \frac{16}{10}\sin^{-1}\left(\frac{5x}{4}\right) + c$$

20. $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$

సాధన: $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \qquad \because \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + c$

$$= \frac{1}{2}\log|1+x^2| + c$$

21. $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$

సాధన: $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int (\log x)^2 . \frac{1}{x} . dx$ $\quad \because \int [f(x)]^n . f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

$$= \frac{(\log x)^{2+1}}{2+1} = \frac{(\log x)^3}{3} + c$$

22. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$

సాధన: $\tan^{-1} x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$

$$\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx = \int e^{\tan^{-1} x} . \frac{1}{1+x^2} . dx$$

$$= \int e^{t} . dt = e^{t} = e^{\tan^{-1} x} + c$$

23. $\int \frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2} dx$

సాధన: $\tan^{-1} x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$

$$\int \frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2} dx = \int \sin(\tan^{-1} x) . \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int \sin t . dt = -\cos t = -\cos(\tan^{-1} x) + c$$

24. $\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx$

సాధన: $x^3 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 3x^2 dx = dt$

$$\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{3x^2 dx}{1+\left(x^3\right)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} t = \tan^{-1}(x^3) + c$$

25. $\int \frac{2}{\sqrt{25+9x^2}} dx$

సాధన: $\int \frac{2}{\sqrt{25+9x^2}} dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{5^2+(3x)^2}} dx = 2 \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right)}{3} = \frac{2}{3} \sinh^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) + c$

26. $\int \frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}dx$

సాధన: $\int \frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{(3x)^2-1^2}}dx = 3\frac{\cosh^{-1}\left(\frac{3x}{1}\right)}{3} = \cosh^{-1}(3x)+c$

27. $\int \sin mx \cos nx\, dx$

సాధన: $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(2\sin mx \cos nx)$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\right]$$

$= \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]$ అని తెలుసు.

$$\therefore \int \sin mx \cos nx\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(m+n)x}{(m+n)}+\frac{-\cos(m-n)x}{(m-n)}\right]+c$$

28. $\int \sin mx \sin nx\, dx$

సాధన: $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(2\sin mx \sin nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)\right]$ అని తెలుసు.

$$\therefore \int \sin mx \sin nx\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}-\frac{\sin(m+n)x}{(m+n)}\right]+c$$

29. $\int \cos mx \cos nx\, dx$

సాధన: $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(2\cos mx \cos nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(mx+nx)+\cos(mx-nx)\right]$ అని తెలుసు.

$$\therefore \int \cos mx \cos nx\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}\right]+c$$

30. $\int \sin x.\sin 2x.\sin 3x.dx$

సాధన: $\sin x.\sin 2x.\sin 3x$

$$= \frac{1}{2}(2\sin x\sin 2x)\sin 3x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(x-2x)-\cos(x+2x)\right]\sin 3x$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left[2\cos x\sin 3x - 2\cos 3x\sin 3x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\sin 3x\cos x - 2\sin 3x\cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\} - \{\sin(3x+3x)+\sin(3x-3x)\}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x\right]$$

$$\int \sin x.\sin 2x.\sin 3x.dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left[\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x\right].dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-\cos 4x}{4} + \frac{-\cos 2x}{2} - \frac{-\cos 6x}{6}\right]$$

$$= \frac{-\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 6x}{24} + c$$

31. $\int \frac{\sin x}{\sin(a+x)}dx$

సాధన: $\int \frac{\sin x}{\sin(a+x)}dx = \int \frac{\sin((x+a)-a)}{\sin(a+x)}dx$

$$= \int \frac{\sin(x+a)\cos a - \cos(x+a)\sin a}{\sin(a+x)}dx$$

$$= \int \left[\frac{\sin(x+a)\cos a}{\sin(a+x)} - \frac{\cos(x+a)\sin a}{\sin(a+x)}\right]dx$$

$$= \int \left[\cos a - \cot(x+a).\sin a\right]dx$$

$$= \cos a\int 1.dx - \sin a\int \cot(x+a)\,dx$$

$$= (\cos a)(x) - (\sin a)\log|\sin(a+x)| + c$$

32. $\int \frac{1}{7x+3}dx$

సాధన: $\int \frac{1}{7x+3}dx = \frac{\log|7x+3|}{7}+c$

33. $\int \frac{\log(1+x)}{1+x}dx$

సాధన: $\int \frac{\log(1+x)}{1+x}dx = \int \log(1+x).\frac{1}{1+x}dx = \frac{[\log(1+x)]^2}{2}+c$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+5x}}dx$

సాధన: $\int \frac{dx}{\sqrt{1+5x}}dx = \frac{2\sqrt{1+5x}}{5}+c$

35. $\int (1-2x^3)x^2\,dx$

సాధన: $\int (1-2x^3)x^2\,dx = \int (x^2-2x^5)\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{2x^6}{6} = \frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{3}+c$

36. $\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^3}dx$

సాధన: $1+\tan x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \sec^2 x dx = dt$

$$\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^3}dx = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} = \frac{t^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2t^2} = \frac{1}{-2(1+\tan x)^2}+c$$

37. $\int x^3 \sin x^4\,dx$

సాధన: $x^4 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 4x^3dx = dt \Rightarrow x^3dx = \frac{dt}{4}$

$$\int x^3\sin x^4\,dx = \int (\sin x^4).x^3\,dx$$

$$= \int \sin t\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \sin t\,dt = \frac{1}{4}(-\cos t) = \frac{-\cos x^4}{4}+c$$

38. $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$

సాధన: $1+\sin x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \cos x\,dx = dt$

$$\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{1+\sin x}+c$$

39. $\int \sqrt[3]{\sin x}\,.\cos x\,dx$

సాధన: $\int \sqrt[3]{\sin x}\,.\cos x\,dx = \int (\sin x)^{\frac{1}{3}}.\cos x\,dx = \dfrac{(\sin x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{3}{4}(\sin x)^{\frac{4}{3}} + c$

40. $\int 2x e^{x^2}\,dx$

సాధన: $x^2 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 2x\,dx = dt$

$\int 2x e^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}.2x\,dx = \int e^t\,dt = e^t = e^{x^2} + c$

41. $\int \dfrac{e^{\log x}}{x}dx$

సాధన: $\log x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \dfrac{1}{x}dx = dt$

$\int \dfrac{e^{\log x}}{x}dx = \int e^{\log x}\dfrac{1}{x}dx = \int e^t\,dt = e^t = e^{\log x} + c$

42. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$

సాధన: $x^3 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 3x^2dx = dt \Rightarrow x^2dx = \dfrac{dt}{3}$

$\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \int \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\dfrac{dt}{3} = \dfrac{1}{3}\sin^{-1}t = \dfrac{1}{3}\sin^{-1}(x^3) + c$

43. $\int \dfrac{2x^3}{1+x^8}dx$

సాధన: $x^4 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 4x^3dx = dt \Rightarrow 2.2x^3dx = dt \Rightarrow 2x^3dx = \dfrac{dt}{2}$

$\int \dfrac{2x^3}{1+x^8}dx = \int \dfrac{2x^3dx}{1+(x^4)^2} = \int \dfrac{\frac{dt}{2}}{1+t^2} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{1+t^2}dt = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}t = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}(x^4) + c$

44. $\int \dfrac{x^8}{1+x^{18}}dx$

సాధన: $x^9 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 9x^8dx = dt \Rightarrow x^8dx = \dfrac{dt}{9}$

$\int \dfrac{x^8}{1+x^{18}}dx = \int \dfrac{x^8dx}{1+(x^9)^2}dx = \int \dfrac{\frac{dt}{9}}{1+t^2} = \dfrac{1}{9}\int \dfrac{1}{1+t^2}dt = \dfrac{1}{9}\tan^{-1}t = \dfrac{1}{9}\tan^{-1}(x^9) + c$

45. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$

సాధన: $xe^x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow (x.e^x + e^x.1)dx = dt \Rightarrow e^x(x+1)dx = dt \Rightarrow e^x(1+x)dx = dt$

$$\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \sec^2 t\,dt = \tan t = \tan(xe^x) + c$$

46. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{(a+b\cot x)^5}dx$

సాధన: $a + b\cot x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow b(-\operatorname{cosec}^2 x)dx = dt \Rightarrow \operatorname{cosec}^2 x dx = \frac{dt}{-b}$

$$\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{(a+b\cot x)^5}dx = \int \frac{\frac{dt}{-b}}{t^5} = -\frac{1}{b}\int \frac{1}{t^5}dt$$

$$= -\frac{1}{b}\int t^{-5}\,dt = -\frac{1}{b}\frac{t^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{1}{b}\frac{t^{-4}}{-4} = \frac{1}{4bt^4} = \frac{1}{4b\left(a+b\cot x\right)^4} + c$$

47. $\int e^x \sin e^x\,dx$

సాధన: $e^x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int e^x \sin e^x\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t = -\cos(e^x) + c$$

48. $\int \frac{\sin(\log x)}{x}dx$

సాధన: $\log x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x}dx = \int \sin(\log x).\frac{1}{x}dx = \int \sin t.dt = -\cos t = -\cos(\log x) + c$$

49. $\int \frac{1}{x\log x}dx$

సాధన: $\log x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{t}.dt = \log|t| = \log|\log x| + c$$

50. $\int \frac{(1+\log x)^n}{x}dx$

సాధన: $1 + \log x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

$$\int \frac{(1+\log x)^n}{x}dx = \int (1+\log x)^n.\frac{1}{x}dx = \int t^n.dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{(1+\log x)^{n+1}}{n+1} + c$$

51. $\int \frac{\cos(\log x)}{x}dx$

సాధన: $\log x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x}dx = \int \cos(\log x).\frac{1}{x}dx = \int \cos t.dt = \sin t = \sin(\log x) + c$$

52. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

సాధన: $\sqrt{x} = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\cos t}{t}.2t\,dt = 2\int \cos t\,dt = 2\sin t = 2\sin\sqrt{x} + c$$

53. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

సాధన: $x^2+x+1 = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow (2x+1)dx = dt$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{x^2+x+1}(2x+1)\,dx = \int \frac{1}{t}.dt = \log|t| = \log|x^2+x+1| + c$$

54. $\int \frac{ax^{n-1}}{bx^n+c}dx$

సాధన: $bx^n + c = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow (b.n.x^{n-1})dx = dt \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{dt}{bn}$

$$\int \frac{ax^{n-1}}{bx^n+c}dx = \int \frac{1}{bx^n+c}.ax^{n-1}\,dx = \int \frac{1}{t}.a.\frac{dt}{bn}$$

$$= \frac{a}{bn}\int \frac{1}{t}.dt = \frac{a}{bn}\log|t| = \frac{a}{bn}\log|bx^n+c| + c$$

55. $\int \frac{1}{x\log x[\log(\log x)]}dx$

సాధన: $\log(\log x) = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}\log x\,dx = dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log x}\frac{1}{x}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{x\log x}dx = dt$$

$$\int \frac{1}{x\log x[\log(\log x)]}dx = \int \frac{1}{\log(\log x)}.\frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{1}{t}.dt = \log|t| = \log|\log(\log x)| + c$$

56. $\int \coth x\,dx$

సాధన: $\int \coth x\,dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x}dx = \log|\sinh x| + c$

57. $\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}dx$

సాధన: $\sqrt{x+2} = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow x+2 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 2 \Rightarrow dx = 2t.dt$

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}dx = \int \frac{1}{(t^2-2+3).t}2t\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\tan^{-1} t = 2\tan^{-1}\sqrt{x+2} + c$$

58. $\int \frac{1}{1+\sin 2x}dx$

సాధన: $\int \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \int \frac{1}{1+\sin 2x}.\frac{1-\sin 2x}{1-\sin 2x}dx$

$$= \int \frac{1-\sin 2x}{1-\sin^2 2x}dx = \int \frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x\cos 2x}\right)dx$$

$$= \int\left(\sec^2 2x - \tan 2x\sec 2x\right)dx$$

$$= \frac{\tan 2x}{2} - \frac{\sec 2x}{2} + c$$

59. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

సాధన: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+2-2}dx = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx$$

$x - \frac{1}{x} = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2} dx = \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left[\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left[\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} \right] + c$$

60. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x}$

సాధన: $\int \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x} = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x(\cos^2 x + \sin 2x)} dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}(\cos^2 x + \sin 2x)} dx = \int \frac{\sec^2 x}{1+2\tan x} dx$$

$1+2\tan x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow 2\sec^2 x dx = dt \Rightarrow \sec^2 x dx = \frac{dt}{2}$

$$= \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\log|t| = \frac{1}{2}\log|1+2\tan x| + c$$

61. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^2} dx$

సాధన: $a+bx = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow b.dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{b},\ x = \frac{t-a}{b} \Rightarrow x^2 = \frac{(t-a)^2}{b^2} = \frac{t^2+a^2-2at}{b^2}$

$$\therefore \int \frac{x^2}{(a+bx)^2} dx = \int \frac{(t^2+a^2-2at)}{b^2t^2} \frac{dt}{b}$$

$$= \frac{1}{b^3}\int \left(\frac{t^2}{t^2} + \frac{a^2}{t^2} - \frac{2at}{t^2} \right) dt = \frac{1}{b^3}\int \left(1 + a^2t^{-2} - 2a\frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{b^3}\left[t + \frac{a^2t^{-1}}{-1} - 2a\log|t| \right] = \frac{1}{b^3}\left[t - \frac{a^2}{t} - 2a\log|t| \right]$$

$$= \frac{1}{b^3}\left[(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx} - 2a\log|a+bx| \right] + c$$

62. $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$

సాధన: $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = \int \sqrt{2}\cos x\, dx = \sqrt{2}\sin x + c$

63. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$

సాధన: $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}}dx$

$$=\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}dx=\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int 1.dx=x+c$$

64. $\int \frac{\sin 2x}{(a+b\cos x)^2}dx$

సాధన: $\int \frac{\sin 2x}{(a+b\cos x)^2}dx=\int \frac{2\sin x\cos x}{(a+b\cos x)^2}dx$

$(a+b\cos x)=t$ అనుకొనుము $\Rightarrow -b\sin x\,dx=dt\Rightarrow \sin x\,dx=\frac{dt}{-b}\Rightarrow \cos x=\frac{t-a}{b}$

$$=\int \frac{2\sin x\cos x}{(a+b\cos x)^2}dx=2\int \frac{\cos x.\sin x\,dx}{(a+b\cos x)^2}$$

$$=2\int \frac{t-a}{b}\frac{1}{t^2}\frac{dt}{-b}=\frac{2}{-b^2}\int\left(\frac{t}{t^2}-\frac{a}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{2}{-b^2}\int\left(\frac{1}{t}-at^{-2}\right)dt=\frac{2}{-b^2}\left[\log|t|-\frac{at^{-2+1}}{-2+1}\right]$$

$$=\frac{2}{-b^2}\left[\log|t|+\frac{a}{t}\right]=\frac{2}{-b^2}\left[\log|a+b\cos x|+\frac{a}{a+b\cos x}\right]+c$$

65. $\int \frac{\sec x}{(\sec x+\tan x)^2}dx$

సాధన: $(\sec x+\tan x)=t$ అనుకొనుము $\Rightarrow (\sec x\tan x+\sec^2 x)dx=dt$

$$\Rightarrow \sec x(\tan x+\sec x)dx=dt\Rightarrow \sec x(t)dx=dt\Rightarrow \sec x\,dx=\frac{dt}{t}$$

$$\therefore \int \frac{\sec x}{(\sec x+\tan x)^2}dx=\int \frac{1}{t^2}\frac{dt}{t}=\int\frac{dt}{t^3}$$

$$=\int t^{-3}dt=\frac{t^{-3+1}}{-3+1}=-\frac{1}{2t^2}=-\frac{1}{2(\sec x+\tan x)^2}+c$$

66. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$

సాధన: $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)}$

$\tan x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \sec^2 x\,dx = dt$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \int \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2} = \int \frac{1}{(at)^2 + b^2} dt$$

$$= \frac{1}{b} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{at}{b}\right)}{a} = \frac{1}{ab} \tan^{-1}\left(\frac{a(\tan x)}{b}\right) + c$$

67. $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$

సాధన: $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = \int \frac{1}{\sin(b-a)} \frac{\sin(b-a)}{\sin(x-a)\sin(x-b)} dx$

$$= \int \frac{\sin[(x-a)-(x-b)]}{\sin(b-a)\sin(x-a)\sin(x-b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int \frac{\sin(x-a)\cos(x-b) - \cos(x-a)\sin(x-b)}{\sin(x-a)\sin(x-b)} dx \qquad (\because b-a = (x-a)-(x-b))$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int \left[\frac{\sin(x-a)\cos(x-b)}{\sin(x-a)\sin(x-b)} - \frac{\cos(x-a)\sin(x-b)}{\sin(x-a)\sin(x-b)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int [\cot(x-b) - \cot(x-a)]\,dx$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)}\left[\frac{\log|\sin(x-b)|}{1} - \frac{\log|\sin(x-a)|}{1}\right] = \frac{1}{\sin(b-a)} \log\left|\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + c$$

68. $\int \frac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

సాధన: $\int \frac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)} = \int \frac{1}{\sin(b-a)} \frac{\sin(b-a)}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int \frac{\sin[(x-a)-(x-b)]}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int \left[\frac{\sin(x-a)\cos(x-b)}{\cos(x-a)\cos(x-b)} - \frac{\cos(x-a)\sin(x-b)}{\cos(x-a)\cos(x-b)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int [\tan(x-b) - \tan(x-a)]\,dx$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)}\left[\log|\sec(x-a)| - \log|\sec(x-b)|\right] + c$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)}\left[\log\left|\frac{\sec(x-a)}{\sec(x-b)}\right|\right] + c$$

69. $\int \frac{\sin 2x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}dx$

సాధన: $\int \frac{\sin 2x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}dx$

$(a\cos^2 x + b\sin^2 x) = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \left[a2\cos x(-\sin x) + b2\sin x\cos x\right]dx = dt$

$$2\sin x\cos x(-a+b)dx = t \Rightarrow 2\sin x\cos x\,dx = \frac{dt}{b-a}$$

$$\int \frac{2\sin x\cos x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{b-a}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int \frac{1}{t}dx = \frac{1}{b-a}\log|t| = \frac{1}{b-a}\log|a\cos^2 x + b\sin^2 x| + c$$

70. $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$

సాధన: $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx = \int \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$

$(\cos x + \sin x) = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow (-\sin x + \cos x)\,dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|\sin x + \cos x| + c$$

71. $\int \frac{\cot(\log x)}{x}dx$

సాధన: $\log x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

$$\int \frac{\cot(\log x)}{x}dx = \int \cot(\log x).\frac{1}{x}.dx$$

$$= \int \cot t.dt = \log|\sin t| = \log|\sin(\log x)| + c$$

72. $\int e^x.\cot e^x.dx$

సాధన: $e^x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int e^x.\cot e^x.dx = \int \cot e^x.e^x.dx$$

$$= \int \cot t.dt = \log|\sin t| = \log|\sin e^x| + c$$

73. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

సాధన: $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx = 2\sqrt{x^2+3x-4}+c \qquad \left(\because \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}\right)$

74. $\int \operatorname{cosec}^2 x\sqrt{\cot x}\,dx$

సాధన: $\cot x = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow -\operatorname{cosec}^2 x\,dx = dt \Rightarrow \operatorname{cosec}^2 x dx = -dt$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\sqrt{\cot x}\,dx = \int \sqrt{\cot x}\operatorname{cosec}^2 x.dx$$

$$= \int \sqrt{t}(-dt) = -\int t^{1/2}\,dt = \frac{-t^{3/2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2}+c$$

75. $\int \sec x\log(\sec x+\tan x)dx$

సాధన: $\log(\sec x+\tan x) = t$ అనుకొనుము $\Rightarrow \frac{1}{\sec x+\tan x}\left[\sec x\tan x+\sec^2 x\right]dx = dt$

$$\Rightarrow \frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{(\sec x+\tan x)}dx = dt \Rightarrow \sec x\,dx = dt$$

$$\int \sec x\log(\sec x+\tan x)dx = \int \log(\sec x+\tan x).\sec x.dx$$

$$= \int t.dt = \frac{t^2}{2} = \frac{[\log(\sec x+\tan x)]^2}{2}+c$$

76. $\int \cos^3 x\,dx$

సాధన: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ అనుకొనుము $\Rightarrow \cos^3 x = \frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \frac{\cos 3x+3\cos x}{4}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3}+3\sin x\right] = \frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x+c$$

77. $\int x\sqrt{4x+3}\,dx$

సాధన: $\sqrt{4x+3} = t$ అనుకొనుము

$\Rightarrow 4x+3 = t^2 \Rightarrow 4.d\,x = 2t\,dt$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}t\,dt \Rightarrow x = \frac{t^2-3}{4}$

$\int x\sqrt{4x+3}\,dx = \int \frac{t^2-3}{4}.t.\frac{t}{2}.dt = \frac{1}{8}\int (t^2-3).t^2.dt$

$= \frac{1}{8}\int (t^4-3t^2)\,dt = \frac{1}{8}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{3t^3}{3}\right] = \frac{t^5}{40} - \frac{t^3}{8}$

$= \frac{(\sqrt{4x+3})^5}{40} - \frac{(\sqrt{4x+3})^3}{8}$

$= \frac{(4x+3)^{5/2}}{40} - \frac{(4x+3)^{3/2}}{8} + c$

78. $\int \frac{1}{a^2+(b+cx)^2}\,dx$

సాధన: $\int \frac{1}{a^2+(b+cx)^2}\,dx = \frac{1}{a}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{b+cx}{a}\right)}{c}$ $\left(\because \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$

$= \frac{1}{ac}\tan^{-1}\left(\frac{b+cx}{a}\right) + c$

❖ ❖ ❖ ❖❖

యూనిట్ 7

నిశ్చిత సమాకలనులు

సమాకలన ప్రాథమిక సిద్ధాంతం

[a, b] మీద f సమాకలనీయం (రీమాన్ సమాకలనీయం), F'=f అయ్యేటట్లు [a, b] మీద అవకలనీయ ప్రమేయం F ఉంటే $\int_a^b f(x) = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$. $\int_a^b f(x)\,dx$ ను a నుంచి b కి f యొక్క 'నిశ్చిత సమాకలని' అంటాం. $'a'$ ని 'దిగువ అవధి' అనీ, $'b'$ ని 'ఎగువ అవధి' అనీ అంటాం. అక్షరం 'x' ను 'సమాకలన చలరాశి' అని అంటారు.

గమనిక: $\mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$ ను $[\mathrm{F}(x)]_a^b$ గా రాస్తాం. x పై $[\mathrm{F}(x)]_a^b$ ఆధారపడదు. ఇంకా $[\mathrm{F}(x)]_a^b = -[\mathrm{F}(x)]_b^a$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ లోని f ను 'సమాకల్యం' అని పిలుస్తాం. $\int_a^b f(x)\,dx$ విలువ f మీద ఆధారపడుతుంది కాని, x గుర్తుపై ఆధారపడదు. అక్షరం 'x' "అభాస చలరాశి". అందువల్ల సౌకర్యంగా ఉండే ఏ గుర్తునైనా వాడవచ్చు.

ధర్మాలు

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

2. $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, ఇక్కడ a < c < b.

5. $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx. & \text{if} \quad f(-x) = f(x) \\ 0, & \text{if} \quad f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

6. $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx. & \text{if} \quad f(2a-x)=f(x) \\ 0, & \text{if} \quad f(2a-x)=-f(x) \end{cases}$$

సమస్యలు

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{5}{2}} x}{\sin^{\frac{5}{2}} x+\cos^{\frac{5}{2}} x}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన: $I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{\frac{5}{2}} x}{\sin^{\frac{5}{2}} x+\cos^{\frac{5}{2}} x}\,dx$ అనుకొనుము. ....(1)

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^{\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^{\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx \qquad \because \int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\frac{5}{2}} x}{\cos^{\frac{5}{2}} x+\sin^{\frac{5}{2}} x}\,dx \qquad ....(2)$$

(1), (2) లను కలపగా

$$I+I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{\frac{5}{2}} x}{\sin^{\frac{5}{2}} x+\cos^{\frac{5}{2}} x}\,dx+\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\frac{5}{2}} x}{\cos^{\frac{5}{2}} x+\sin^{\frac{5}{2}} x}\,dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^{\frac{5}{2}} x}{\sin^{\frac{5}{2}} x+\cos^{\frac{5}{2}} x}+\frac{\sin^{\frac{5}{2}} x}{\sin^{\frac{5}{2}} x+\cos^{\frac{5}{2}} x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{5}{2}} x+\sin^{\frac{5}{2}} x}{\sin^{\frac{5}{2}} x+\cos^{\frac{5}{2}} x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.dx=[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2I=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{\frac{5}{2}} x}{\sin^{\frac{5}{2}} x+\cos^{\frac{5}{2}} x}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1)$ అని చూపండి.

సాధన: $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx$ అనుకొనుము.

కాని $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, ఇక్కడ $a = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ \mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin x + \cos x} - \frac{x}{\sin x + \cos x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin x + \cos x} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx - \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I} + \mathrm{I} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} dx,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ and } \sec^2\frac{x}{2} = 1+t^2$$

$x = 0$ అయినప్పుడు $t = 0$ & $x = \frac{\pi}{2}$ అయినప్పుడు $t = 1$.

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{(\sin x + \cos x)\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{2dt}{2t + 1 - t^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{2})^2-(t-1)^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+t-1}{\sqrt{2}-t+1}\right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right).$$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ అని చూపండి.

సాధన: $I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ అనుకొనుము.

$a = \frac{\pi}{2},\ f(x) = \sin^n x = (\sin x)^n$ అనుకొనుము.

$$f(a-x) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^n$$

$$= (\cos x)^n = \cos^n x$$

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ మనకు తెలుసు

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$. అందుచేత నిరూపించడమైనది.

4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ గణించండి.

సాధన: $a = \frac{\pi}{6},\ b = \frac{\pi}{3},\ f(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$ అనుకొనుము.

అప్పుడు $a+b-x = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x = \left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\therefore f(a+b-x) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} = \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$$ అనుకొనుము.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore\ I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx \Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx.$$

కలపగా

$$I+I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$2I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}1.dx=[x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$I=\frac{\pi}{6\times 2}=\frac{\pi}{12}\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx=\frac{\pi}{12}.$$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}\,dx$ గణించండి.

సాధన: $\displaystyle I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}\,dx$ అనుకొనుము.

$\displaystyle a=\pi,\ f(x)=\frac{x\sin x}{1+\sin x}$ అనుకొనుము.

అప్పుడు $f(a-x)=f(\pi-x)=\dfrac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)}=\dfrac{(\pi-x)\sin x}{1+\sin x}$

$\int\limits_0^a f(x)\,dx=\int\limits_0^a f(a-x)\,dx$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore \mathrm{I}=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin x}dx=\int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\sin x}dx$$

$$\therefore \mathrm{I}=\int_0^\pi \frac{\pi\sin x-x\sin x}{1+\sin x}dx$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{\pi\sin x}{1+\sin x}-\frac{x\sin x}{1+\sin x}\right)dx$$

$$=\int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{1+\sin x}dx-\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$$

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\sin x}dx-\mathrm{I}$$

$$\therefore \mathrm{I}+\mathrm{I}=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{I}=\pi\int_0^\pi \frac{1+\sin x-1}{1+\sin x}dx$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\frac{1+\sin x}{1+\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^\pi 1.dx-\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[(x)_0^\pi-\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\pi-\int_0^\pi \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(\sec^2 x - \sec x \tan x\right) dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\left(\tan x - \sec x\right)_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\left[\left(\tan \pi - \sec \pi\right) - \left(\tan 0 - \sec 0\right)\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\left[0 - (-1) - 0 + 1\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}(2) = \frac{\pi^2}{2} - \pi$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin x} dx = \frac{\pi^2}{2} - \pi$$

6. $\int_1^4 x\sqrt{x^2 - 1}\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_1^4 x\sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int_1^4 \left(x^2 - 1\right)^{1/2} . x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \left(x^2 - 1\right)^{1/2} .2\, x\, dx \qquad \int \left[f(x)\right]^n . f'(x) dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4 = \left[\frac{1}{2}\frac{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[(4^2 - 1)^{3/2} - (1 - 1)^{3/2}\right] = \frac{1}{3}\left[(15)^{3/2}\right]$$

7. $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2}\, dx \qquad \left(\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{2}\sqrt{4-4} + 2\sin^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)\right] - \left[\frac{0}{2}\sqrt{4-0} + 2\sin^{-1} 0\right]$$

$$= 0 + 2\sin^{-1}(1) - 0 - 0 = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

8. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin|x|\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin|x|\, dx = \int_{-\pi/2}^{0} \sin|x|\, dx + \int_{0}^{\pi/2} \sin|x|\, dx$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \sin(-x)\, dx + \int_{0}^{\pi/2} \sin x dx \qquad \left(\because -\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow |x| = -x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |x| = x\right)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} -\sin x\, dx + (-\cos x)_0^{\pi/2}$$

$$= [\cos x]_{-\pi/2}^{0} + \left(-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right)$$

$$= \left[\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + (-0+1)$$

$$= 1 - 0 - 0 + 1 = 2.$$

9. $\int_{2}^{3} \frac{2x}{1+x^2}\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_{2}^{3} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \left[\log\left|1+x^2\right|\right]_2^3 \qquad \left(\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)|\right)$

$$= \log 10 - \log 5 = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log 2.$$

10. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_{0}^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = \int_{0}^{\pi} \sqrt{4.\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$

$$= \int_{0}^{\pi} 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \left(2.\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right)_0^{\pi} = \left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = \left[4\sin\frac{\pi}{2} - 4\sin 0\right] = 4.$$

11. $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $I = \int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ అనుకొనుము.

కాని $\int_0^{a} f(x)\, dx = \int_0^{a} f(a-x)\, dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \int_0^{\pi} \sin^3 (\pi - x) \cos^3 (\pi - x)\, dx$$

$$= -\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\, dx = -I$$

$\therefore\ I = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0.$

$\therefore \int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\, dx = 0.$

12. $\int_0^{2} |1-x|\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^{2} |1-x|\, dx = \int_0^{1} |1-x|\, dx + \int_1^{2} |1-x|\, dx$

$$= \int_0^{1} (1-x)dx + \int_1^{2} (-1+x)\, dx \qquad \left(\because 0 < x < 1 \Rightarrow |1-x| = +(1-x),\ 1 < x < 2 \Rightarrow |1-x| = -(1-x) = (-1+x)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \left(-x + \frac{x^2}{2}\right)_1^2$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - (0-0)\right] + \left[\left(-2 + \frac{4}{2}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - 2 + 2 + 1 - \frac{1}{2} = 1.$$

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x}\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x}\, dx$ అనుకొనుము.

$a = -\frac{\pi}{2},\ b = \frac{\pi}{2},\ f(x) = \frac{\cos x}{1+e^x}$ అనుకొనుము.

$$f(a+b-x) = f\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right) = f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{\cos x}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{\cos x}{e^x+1}\times e^x = \frac{e^x.\cos x}{1+e^x}$$

కాని $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

$$\therefore\ \mathrm{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x}dx \Rightarrow \mathrm{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^x.\cos x}{1+e^x}dx$$

కూడగా

$$\mathrm{I}+\mathrm{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x}dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^x.\cos x}{1+e^x}dx$$

$$\Rightarrow 2\,\mathrm{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{1+e^x} + \frac{e^x.\cos x}{1+e^x}\right)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x + e^x.\cos x}{1+e^x}dx$$

$$\Rightarrow 2\,\mathrm{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x(1+e^x)}{1+e^x}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$$

$$\Rightarrow 2\,\mathrm{I} = (\sin x)_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\ \mathrm{I} = 1-(-1) = 2$$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = 1 \Rightarrow \mathrm{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x}dx = 1.$$

14. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}dx$

$$= \left(\frac{1}{2}.2\sqrt{x^2+16}\right)_0^3$$

$$= \left(\sqrt{x^2+16}\right)_0^3$$

$$= \sqrt{3^2+16} - \sqrt{0^2+16}$$

$= 5 - 4 = 1.$

15. $\int_0^1 x.e^{-x^2}\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^1 x.e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}.x\, dx$

$-x^2 = \mathrm{t}$ అనుకొనుము $\Rightarrow -2x\, dx = dt \Rightarrow x\, dx = \dfrac{-dt}{2}$

ఎగువ అవధి: $x = 1 \Rightarrow \mathrm{t} = -1$, దిగువ అవధి: $x = 0 \Rightarrow \mathrm{t} = 0$

$$\int_0^1 x.e^{-x^2}\, dx = \int_0^{-1} e^t.\left(\frac{-dt}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^t dt = -\frac{1}{2}\left(e^t\right)_0^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\right).$$

16. $\int_0^5 \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^5 \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}} dx = \left(\dfrac{2\sqrt{2x-1}}{2}\right)_1^5$

$$= \left(\sqrt{2x-1}\right)_1^5$$

$$= \sqrt{10-1} - \sqrt{2-1} = \sqrt{9} - \sqrt{1}$$

$= 3 - 1 = 2.$

17. $\int_0^4 \dfrac{x^2}{1+x} dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^4 \dfrac{x^2}{1+x} dx = \int_0^4 \left[(x-1) + \dfrac{1}{x+1}\right] dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x+\log|x+1|\right]_0^4$$

$$=\left(\frac{4^2}{2}-4+\log|4+1|\right)-\left(\frac{0}{2}-0+\log 1\right)$$

$$=8-4+\log 5-0$$

$$=(4+\log 5)$$

18. $\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{x^2+2}dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{x^2+2}dx=\int_{-1}^{2}\left(1+\frac{-2}{x^2+2}\right)dx$

$$=\int_{-1}^{2}1\,dx-2\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dx$$

$$=[x]_{-1}^{2}-\left[2.\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-1}^{2}$$

$$=[2-(-1)]-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{2}}-\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)$$

$$=3-\sqrt{2}\left(\tan^{-1}\sqrt{2}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

19. $\int_{0}^{4}|2-x|\,dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_{0}^{4}|2-x|\,dx=\int_{0}^{2}|2-x|\,dx+\int_{2}^{4}|2-x|\,dx$

$$=\int_{0}^{2}(2-x)\,dx+\int_{2}^{4}(-2+x)\,dx$$

$$=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\left[-2x+\frac{x^2}{2}\right]_2^4$$

$$=\left[4-\frac{4}{2}-0\right]+\left[\left(-8+\frac{16}{2}\right)-\left(-4+\frac{4}{2}\right)\right]$$

$$= 2 + [0 + 4 - 2] = 4$$

20. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x}$ ను గణించండి.

సాధన: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x}$ అనుకొనుము.

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ అని మనకు తెలుసు.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin^5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^5\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\cos^5 x + \sin^5 x} dx$$

$$\therefore\ I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\cos^5 x + \sin^5 x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} + \frac{\cos^5 x}{\cos^5 x + \sin^5 x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin^5 x + \cos^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1.dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx = \frac{\pi}{4}$$

21. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$ ను గణించండి.

సాధన: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$ అనుకొనుము.

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore\ \mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx \Rightarrow \mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx$$

$$\therefore\ \mathrm{I}+\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx$$

$$2\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}+\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}0\ dx=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=0\ \therefore\ \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=0.$$

22. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}$ ను గణించండి.

సాధన: $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}\Rightarrow \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

ఎగువ అవధి: $x = 0 \Rightarrow$ t = tan 0 = 0, దిగువ అవధి: $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}=\int_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$=\int_0^1\frac{2dt}{4(1+t^2)+5\left(1-t^2\right)}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{2dt}{9-t^2} = 2\int_0^1 \frac{1}{3^2-t^2}\,dt \quad = 2.\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{3+t}{3-t}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[\log\left(\frac{4}{2}\right) - \log(1)\right] = \frac{1}{3}\log 2$$

23. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{9+16\sin 2x}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{9+16\sin 2x}\,dx$

$\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x)\,dx = dt$

$t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x$

$= 1 - \sin 2x$

$\Rightarrow \sin 2x = -t^2 + 1 = 1 - t^2$

ఎగువ అవధి: $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = 0$

దిగువ అవధి: $x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 - \cos 0 = -1$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{9+16\sin 2x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{9+16(t^2+1)}$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{dt}{-16t^2+25} \quad = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{5^2-(4t)^2}$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{2(5)}.\log\left|\frac{5+4t}{5-4t}\right|}{4}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{40}\left[\log 1 - \log\left|\frac{5+4(-1)}{5-4(-1)}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{40}\left(0 - \log\frac{1}{9}\right) \quad = \frac{-1}{40}.\log\frac{1}{9}$$

$$= -\frac{1}{40}.\log 9^{-1} = \frac{1}{40}\log 9 = \frac{1}{40}\log 3^2 \quad = \frac{1}{20}\log 3.$$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$ అనుకొనుము. .... (1)

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore\ \mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos x + b\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx \quad \text{........ (2)}$$

(1), (2) లను కూడగా

$$\mathrm{I} + \mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos x + b\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin x + b\cos x + a\cos x + b\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a(\sin x + \cos x) + b(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a+b)(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= (a+b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.dx = (a+b)(x)_0^{\pi/2} = (a+b)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \mathrm{I} = (a+b)\frac{\pi}{4}$$

25. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన: $I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$ అనుకొనుము.

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{1+\sin(\pi - x)}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin x}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{1+\sin x} - \frac{x}{1+\sin x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi}{1+\sin x}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,dx - I$$

$$\therefore I + I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}\,dx$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec^2 x - \sec x \tan x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\tan x - \sec x \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[(\tan \pi - \sec \pi) - (\tan 0 - \sec 0) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[0 - (-1) - 0 + 1 \right] = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \pi.$$

26. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$

$x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta \Rightarrow 1+x^2 = 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

ఎగువ అవధి: $x = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, దిగువ అవధి: $x = 0 \Rightarrow \tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\, d\theta$$

$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\, d\theta$ అనుకొనుము.

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore \mathrm{I} = \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[\frac{(1+\tan\theta)+(1-\tan\theta)}{1+\tan\theta}\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} [\log 2 - \log(1+\tan\theta]\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log 2\, d\theta - \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\, d\theta$$

$$= \log 2\int_0^{\pi/4} 1.d\theta - \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow I + I = \log 2.(\theta)_0^{\pi/4} = \log 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\log 2$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\log 2$$

27. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx$ అని మనకు తెలుసు.

$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ అనుకొనుము.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\therefore I = \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x - x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I$$

$$\therefore I + I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$\cos x = t \Rightarrow \sin x dx = -dt$

ఎగువ అవధి: $x = \pi \Rightarrow \mathrm{t} = \cos\pi = -1$, దిగువ అవధి: $x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\tan^{-1} t]_1^{-1} = -\frac{\pi}{2}[\tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}(1)]$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

28. $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$ ను గణించండి.

సాధన: $I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$ అనుకొనుము.

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\log 2-\log(1+\tan x)\right)dx$$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \log 2\,dx - I$$

$$\Rightarrow I + I = (\log 2)\int_0^{\pi/4} 1.dx$$

$$\Rightarrow 2I = (\log 2)[x]_0^{\pi/4}$$

$$= \log 2\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{4}\log 2$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4\times 2}\log 2$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **8**

అవకలన సమీకరణాలు

నిర్వచనము : ఒక అస్వతంత్ర చలరాశి, ఒక స్వతంత్ర చలరాశి దృష్ట్యా ఆ అస్వతంత్ర చలరాశి అవకలజాలతో ఏర్పడిన సమీకరణాన్ని సాధారణ అవకలన సమీకరణం అని అంటాం.

ఉదా: $\frac{dy}{dx}+5x=\cos x$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-e^x=4$$

నిర్వచనము : ఒక అవకలన సమీకరణంలో, ఒక అస్వతంత్ర చలరాశి, ఒకటికంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులుంటే దానిని పాక్షిక అవకలన సమీకరణం అంటాం.

Eg: $x.\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ $\qquad$ $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=0$

$z=f(x,y)$ $\qquad$ $\omega=f(x,y,z)$

మనం సాధారణ అవకలన సమీకరణాలు గురించి నేర్చుకుందాం.

నిర్వచనము : ఒక అవకలన సమీకరణంలోని అత్యధిక పరిమాణం ఉన్న అవకలజ పరిమాణాన్నే అవకలన సమీకరణ పరిమాణం అంటాం.

నిర్వచనము : ఒక అవకలన సమీకరణాన్ని అవకలజాలలో బహుపది సమీకరణంగా రాయగలిగినపుడు, ఆ బహుపది సమీకరణంలో గరిష్ఠ పరిమాణపు అవకలజపు గరిష్ఠ ఘాతాన్ని ఆ అవకలన సమీకరణపు తరగతి అంటాం (చలరాశులు x, y ఘాతాలు పూర్ణాంకాలు కానవసరం లేదు).

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}\left(1+x^{1/2}\right)}$

   పరిమాణం $=1$, తరగతి $=1$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/3}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^5$$

పరిమాణం $=2$, తరగతి $=3$

3. $$1+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$$

$$\Rightarrow\left[1+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^2=\left[2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

పరిమాణం $=2$, తరగతి $=4$

4. $$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\log\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

పరిమాణం 2, తరగతిని నిర్వచించలేము. ఎందుకంటే ఈ సమీకరణాన్ని అవకలజాల బహుపది సమీకరణంగా వ్రాయలేము.

5. $$\frac{d^2y}{dx^2}=-p^2y$$

పరిమాణం $=2$, తరగతి $=1$

6. $$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-e^x=4$$

పరిమాణం $=3$, తరగతి $=2$

7.* $$\left[\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{6/5}=6y$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=(6y)^{\frac{5}{6}}$$

పరిమాణం $=2$, తరగతి $=1$

❖ n పరిమాణంగా గల సాధారణ అవకలన సమీకరణ సాధారణ రూపం

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},.....,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

అవకలన సమీకరణ సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తూ, కొన్ని యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలను కలిగి, అస్వతంత్ర చలరాశి, స్వతంత్ర చలరాశుల మధ్యగల సంబంధం సూచించే సమీకరణమే అవకలన సమీకరణం సాధన.

సాధారణ సాధన : అవకలన సమీకరణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యల సంఖ్య అవకలన సమీకరణ పరిమాణానికి సమానమైతే ఆ సాధనను సాధారణ సాధన అంటాం.

ప్రత్యేక సాధన : సాధారణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలకు ప్రత్యేక విలువలు ప్రతిక్షేపించడం వల్ల వచ్చే సాధనను ప్రత్యేక సాధన అంటాం.

అతిస్వల్ప సమాధాన తరహా ప్రశ్నలు

1. c ఒక యాదృచ్ఛిక సంఖ్య అయితే $y = cx - 2c^2$ కు అనుగుణంగా వచ్చే అవకలన సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సమీకరణం $y = cx - 2c^2$ ..... (1)

దీనిలో ఒకే యాదృచ్ఛిక చలరాశి వుంది.

కనక, x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = c(1) - 0$$

$c = \frac{dy}{dx}$ ని(1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే ‘c’ తొలగిపోతుంది.

$\therefore$ కావలసిన అవకలన సమీకరణం $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)x - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

2. A, B లు యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలయితే $y = A\cos 3x + B\sin 3x$ కు అనుగుణంగా ఉన్న అవకలన సమీకరణాన్ని ఏర్పరచండి.

సాధన: దత్త సమీకరణం $y = A\cos 3x + B\sin 3x$ ..... (1)

రెండు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకాలు వున్నందువల్ల

(1) ను x దృష్ట్యా రెండుసార్లు అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x \qquad .....(2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

$$= -9(A\cos 3x + B\sin 3x) = -9y$$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -9y$ A, B లను తొలగిస్తే ఏర్పడిన అవకలన సమీకరణం.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

3. $xy = ce^{x} + be^{-x} + x^{2}$ నుంచి యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు b, c లను తొలగిస్తే వచ్చే అవకలన సమీకరణం పరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన: $xy = ce^{x} + be^{-x} + x^{2}$ ...... (1)

సమీకరణంలో రెండు యాదృచ్ఛిక చలరాశులు కలవు.

అందువల్ల, (1) ను x దృష్ట్యా రెండుసార్లు వరసగా అవకలనం చేయగా

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y.1 = ce^{x} + be^{-x}(-1) + 2x \quad ....(2)$$

$$x\frac{d^{2}y}{dx^{2}} + \frac{dy}{dx}.1 + \frac{dy}{dx} = ce^{x} + be^{-x} + 2 \quad ....(3)$$

$$\Rightarrow x\frac{d^{2}y}{dx^{2}} + \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = \left(ce^{x} + be^{-x}\right) + 2$$

$$= (xy - x^{2}) + 2 \quad ((1) \text{ నుంచి})$$

$$\Rightarrow x.\frac{d^{2}y}{dx^{2}} + 2\frac{dy}{dx} = xy - x^{2} + 2$$. ఇది కావలసిన అవకలన సమీకరణం.

$\therefore$ పరిమాణం $= 2$.

4. మూలబిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తాల కుటుంబపు అవకలన సమీకరణం పరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన: కేంద్రం $(0, 0)$ గా గల వృత్తాల సాధారణ సమీకరణం

$x^{2} + y^{2} = r^{2}$ .... (1)

r^{2} - యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశి. అందువల్ల,

సమీకరణం (1) ని ఒకేసారి అవకలనం చేయగా

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ పరిమాణం $= 1$.

5. బ్రాకెట్లలో చూపిన పరామితులతో కింద ఇచ్చిన వక్రాల కుటుంబాల అవకలన సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

(i) $y = c(x-c)^{2}$ .... (1) (c పరామితి)

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = c.2(x-c) \quad .... (2)$$

ఇపుడు, $\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{c(x-c)^{2}}{c.2(x-c)}$

$$\Rightarrow \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{x-c}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{\frac{dy}{dx}} = x-c$$

$$\Rightarrow c = x - \frac{2y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y = \left(x - \frac{2y}{\frac{dy}{dx}}\right) \times \left(\frac{2y}{\frac{dy}{dx}}\right)^2$$

$$y = \frac{x.\frac{dy}{dx} - 2y}{\frac{dy}{dx}} \times \frac{4.y^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(x\frac{dy}{dx} - 2y\right)4y^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 4xy\frac{dy}{dx} - 8y^2$$

(ii) $xy = ae^x + be^{-x}$.....(1); (a, b లు పరామితులు)

రెండు పరామితులున్నందువల్ల, సమీకరణం (1) ని రెండుసార్లు వరసగా x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా,

$$x.\frac{dy}{dx} + y.1 = ae^x + be^{-x}.(-1)$$

$$\Rightarrow x.\frac{dy}{dx} + y = ae^x - be^{-x} \qquad ....(2)$$

మరలా అవకలనం చేయగా

$$x.\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.1 + \frac{dy}{dx} = ae^x + be^{-x} = xy \qquad (1) \text{ నుంచి}$$

$x.\frac{d^2y}{dx^2} + 2.\frac{dy}{dx} - xy = 0$. ఇది కావలసిన అవకలన సమీకరణం.

(iii) $y = a\cos(nx+b)$...(1); (a, b లు పరామితులు)

రెండు పరామితులున్నందువల్ల, సమీకరణం (1) ని రెండుసార్లు వరసగా x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా,

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(nx+b)\times n$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -an\sin(nx+b)$$

మరలా x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\,n\cos(nx+b)\times n$$

$$= -a\,n^2\cos(nx+b)$$

$$= -n^2\left[\cos(nx+b)\right]$$

$$= -n^2 y$$

$\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = -n^2 y$. ఇది కావలసిన అవకలన సమీకరణం.

అవకలన సమీకరణాలను సాధించటం

ప్రథమ పరిమాణ, ప్రథమ తరగతి అవకలన సమీకరణాల సాధనలు కనుక్కొనే పద్ధతులు.

ప్రథమ పరిమాణ, ప్రథమ తరగతి అవకలన సమీకరణంలో $\dfrac{dy}{dx}$, x, y లతో కూడిన పదాలు వుండటం వలన ప్రథమ పరిమాణ, ప్రథమ తరగతి అవకలన సమీకరణం $\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$ రూపంలో వుంటుంది. ఇక్కడ, x, y చలరాశులలో F ప్రమేయం.

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతి

దత్త అవకలన సమీకరణం $f(x).dx + g(y).dy = 0$ రూపంలో ఉన్నప్పుడు, ఆ సమీకరణంలోని ప్రతి పదాన్ని సమాకలనం చేయడం వల్ల దాని సాధనను రాబట్టవచ్చు. ఇలా అవకలన సమీకరణం సాధనను రాబట్టేచ విధానాన్నే విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతి అంటాం.

దీర్ఘసమాధాన తరహా ప్రశ్నలు

1. $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్త అవకలన సమీకరణం $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\Rightarrow ydy = -xdx$$

గమనిక: ఇరువైపులా సమాకలనం చేసిన తరువాత, సమాకలన స్థిరాంకం C ను ఏదో ఒకవైపు రాయాలి.

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int ydy = \int -xdx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2c$. ఇది కావలసిన సాధన.

2. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x.e^y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x.dx$$

$$\Rightarrow e^{-y}dy = e^x dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int e^{-y}dy = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow -e^{-y} = e^x + c$$

$\Rightarrow e^x + e^{-y} + c = 0$. ఇది కావలసిన సాధన.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2y}{x-1}$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2y}{x-1}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 2y} = \frac{dx}{x-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 2y} = \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2 + 2y + 1^2 - 1^2} dy = \log|x-1| + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(y+1)^2 - 1^2} dy = \log|x-1| + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(1)}\log\left|\frac{y+1-1}{y+1+1}\right| = \log|x-1| + \log c$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2\log\left((x-1)\times c\right)$$

$$\Rightarrow \log\frac{y}{y+2} = \log\left((x-1)\times c\right)^2$$

$$\Rightarrow \log\frac{y}{y+2} = \log(x-1)^2 \times c^2$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y+2} = c^2(x-1)^2$$

$\Rightarrow y = c^2(y+2)(x-1)^2$. ఇది కావలసిన సాధన.

4. $y(1+x)dx + x(1+y)dy = 0$ ను సాధించండి.

సాధన: $y(1+x)dx + x(1+y)dy = 0$

$$\Rightarrow y(1+x)dx = -x(1+y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{y(1+x)}{-x(1+y)} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)}{-x} \times \frac{y}{1+y} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)}{-x}dx = \frac{1+y}{y}dy$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\Rightarrow -\int\frac{(1+x)}{x}dx = \int\frac{1+y}{y}dy$$

$$\Rightarrow -\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{y}\right)dy$$

$$\Rightarrow -\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx = \int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$$

$$\Rightarrow -[\log x + x] = [\log y + y] + c$$

$$\Rightarrow -\log x - x = \log y + y + c$$

$\Rightarrow x + y + \log x + \log y + c = 0$. ఇది కావలసిన సాధన.

5. $\sqrt{1+x^2}\ \sqrt{1+y^2}\, dx + xy\ dy = 0$ ను సాధించండి.

సాధన: $\Rightarrow xydy = -\sqrt{1+x^2}\ \sqrt{1+y^2}\ dx$

$$\Rightarrow \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x}$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\Rightarrow \int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x} \qquad -(1)$$

L.H.S

$$= \int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}dy \qquad \int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}$$

$$= \frac{1}{2}.2\sqrt{1+y^2}$$

$$= \sqrt{1+y^2}$$

R.H.S $= \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

$$= \int \sqrt{1+x^2}.\frac{dx}{x}$$

$$= \int t.\frac{tdt}{t^2-1}$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2-1}dt$$

$$= \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt$$

$$= \int \left(\frac{t^2-1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$1+x^2 = t^2$ అనుకొనుము. $\Rightarrow t = \sqrt{1+x^2}$

$$\Rightarrow x^2 = t^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt{t^2-1}$$

$$\Rightarrow 2xdx = 2tdt$$

$$\Rightarrow dx = \frac{tdt}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{tdt}{x.x} = \frac{tdt}{x^2}$$

$$= \frac{tdt}{t^2-1}$$

$$= t + \frac{1}{2.1}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right| + c$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$= \frac{(1+x^2-1)}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^2}$$

$$= \frac{x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^2}$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)^2$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\sqrt{1+y^2} = -\left[\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|\right] + c$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right| = c$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)^2 = c$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} + \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right) = c$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} + \log x - \log\left(\sqrt{1+x^2}+1\right) = c$$

6. $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్తాంశం $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,dy = -\sqrt{1-y^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} y = -\sin^{-1} x + c$$

$\Rightarrow \sin^{-1} x + \sin^{-1} y = c$. ఇది కావలసిన సాధన.

7. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ ను సాధించండి.

సాధన: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2}=\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$Tan^{-1}y=Tan^{-1}x+c$. ఇది కావలసిన సాధన.

8. $\frac{dy}{dx}=e^{y-x}$ ను సాధించండి.

సాధన: $\frac{dy}{dx}=e^{y-x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{e^x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{e^y}=\frac{dx}{e^x}$$

$$\Rightarrow e^{-y}dy=e^{-x}dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\Rightarrow \int e^{-y}dy=\int e^{-x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-y}}{-1}=\frac{e^{-x}}{-1}+c$$

$\Rightarrow e^{-y}=e^{-x}+c$. ఇది కావలసిన సాధన.

9. $\left(e^x+1\right)ydy+\left(y+1\right)dx=0$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్తాంశం $\left(e^x+1\right)ydy+\left(y+1\right)dx=0$

$$\Rightarrow \left(e^x+1\right)ydy=-\left(y+1\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{ydy}{y+1}=\frac{-dx}{e^x+1}$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\Rightarrow \int \frac{ydy}{y+1} = \int \frac{-dx}{e^x+1} \qquad \text{...................(1)}$$

L.H.S: $\int \frac{y}{y+1} dy$

$$= \int \frac{y+1-1}{y+1} dy$$

$$= \int \left(\frac{y+1}{y+1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int \left(1 - \left(\frac{1}{y+1} \right) \right) dy = \int 1.dy - \int \left(\frac{1}{y+1} \right) dy$$

$$= y - \log|y+1|$$

RHS: $\int \frac{dx}{e^x+1}$ Put $e^x = t$

$$= \int \frac{dt}{t(t+1)} \qquad e^x dx = dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \qquad dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}.$$

$$= \log|t| - \log|t+1|$$

$$= \log|e^x| - \log|e^x+1| + c$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనకు కావలసిన సమీకరణం

$$y - \log|y+1| = -\log|e^x| + \log|e^x+1| + c$$

$$\Rightarrow y = \log(y+1) - \log e^x + \log(e^x+1) + \log c$$

$$y = \log_e \left[\frac{(y+1)(e^x+1)c}{e^x} \right] \qquad \left(\because \frac{e^x+1}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 1 + e^{-x} \right)$$

$$\Rightarrow e^y = \frac{(y+1)(e^x+1).c}{e^x}$$

$$\Rightarrow e^y = c(y+1)(1+e^{-x})$$

Problems for Practice:

1. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ ను సాధించండి. Ans: $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$

2. $\tan y \; dx + \tan x \; dy = 0$ ను సాధించండి. Ans: $\sin x . \sin y = c$

10. $\sqrt{1+x^2}dx+\sqrt{1+y^2}dy=0$ ను సాధించండి.

సాధన: $\Rightarrow \sqrt{1+x^2}dx=-\sqrt{1+y^2}dy$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=-\int\sqrt{1+y^2}dy$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\sinh^{-1}(x)=-\left[\frac{y}{2}\sqrt{1+y^2+}\frac{1}{2}\sinh^{-1}y\right]+c$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}+\sinh^{-1}x+\sinh^{-1}y=2c$$

11. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y}{xy+x}$ ను సాధించండి.

సాధన: $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y}{xy+x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y(x+1)}{x(y+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{y+1}.\frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y}dy=\frac{x+1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{y}+\frac{1}{y}\right)dy=\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{y}\right)dy=\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\Rightarrow \int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$\Rightarrow y+\log|y|=x+\log|x|+c$. ఇది కావలసిన సాధన.

12. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$ ను సాధించండి.

సాధన: $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$ ____(1)

$y-x=t^2$ ప్రతిక్షేపించగా

diff w.r.t x

$$\frac{dy}{dx}-1=2t\frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1+2t\frac{dt}{dx}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$1+2t\frac{dt}{dx}=t$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{t-1}{2t}$$

$$\Rightarrow dt=\left(\frac{t-1}{2t}\right)dx \quad \Rightarrow \frac{2tdt}{t-1}=dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$2\int\frac{t.dt}{t-1}=\int dx \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\text{LHS} = 2\int\frac{t-1+1}{t-1}\,dt$$

$$=2\int\left(\frac{t-1}{t-1}+\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=2\left[t+\log|t-1|\right]$$

(2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2\left[t+\log|t-1|\right]=x+c$$

$\Rightarrow 2\left[\sqrt{y-x}+\log\sqrt{y-x}-1\right]=x+c$. ఇది ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణానికి కావలసిన సాధన.

Problems for Practice

1. $\dfrac{dy}{dx}+1=e^{x+y}$ ను సాధించండి. Ans: $e^{-(x+y)}+x+c=0$

Hint: put $x+y=t$

13. $\frac{dy}{dx}=(3x+y+4)^2$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx}=(3x+y+4)^2$ ___ (1)

$3x+y+4=t$ ప్రతిక్షేపించగా

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$3.1+\frac{dy}{dx}+0=\frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-3$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dt}{dx}-3=t^2$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx}=t^2+3$$

$$\Rightarrow dt=(t^2+3)dx.$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{t^2+3}=dx.$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{dt}{t^2+3}=\int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{t^2+(\sqrt{3})^2}\,dt=\int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)=x+c$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+y+4}{\sqrt{3}}\right)=x+c$. ఇది దత్త అవకలన సమీకరణానికి కావలసిన సాధన.

14. $\frac{dy}{dx}-x\tan(y-x)=1$ ను సాధించండి.

సాధన: $y-x=t$ అనుకుంటే $\frac{dy}{dx}-1=\frac{dt}{dx}$.

అందువల్ల, దత్త సమీకరణం

$$1+\frac{dt}{dx}-x\tan t=1$$

లేదా $\frac{dt}{dx}=x\tan t$ అవుతుంది.

అందువల్ల, $\cot\ t\ dt = x.dx$ కనక $\int \cot t\,dt = \int x\ dx$.

అందువల్ల $\log|\sin t| = \frac{x^2}{2}+c$

$\log|\sin(y-x)| = \frac{x^2}{2}+c$. కావలసిన సాధన.

15. $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్త అవకలన సమీకరణం $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sin(x+y) \qquad \_\_(1)$$

$x+y=t$ అనుకొనుము.

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dt}{dx}-1=\sin t$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx}=1+\sin t$$

$$\Rightarrow dt=(1+\sin t)dx$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{1+\sin t}=dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int\frac{dt}{1+\sin t}=\int dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{1+\sin t} \times \frac{1-\sin t}{1-\sin t} \right) dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-\sin t}{1-\sin^2 t}\, dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\, dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin t}{\cos^2 t} \right) dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\sec^2 t - \tan t \sec t \right) dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \sec^2 t . dt - \int \tan t \sec t\, dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \tan t - \sec t = x + c$$

$\Rightarrow \tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c$. ఇది ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణానికి కావలసిన సాధన.

16. $\frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$ _____ (1)

$x + y = t$ అనుకొనుము.

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \tan^2 t$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 + \tan^2 t$$

$$= \sec^2 t$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sec^2 t$$

$$\Rightarrow dt = \sec^2 t . dx$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{\sec^2 t} = dx$$

$$\Rightarrow \cos^2 t \; dt \; = dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int \cos^2 t \, dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int (1+\cos 2t) \; dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right] = x + c$$

$$\Rightarrow \frac{t + \frac{\sin 2t}{2}}{2} = x + c$$

$$\Rightarrow t + \frac{1}{2}\sin 2t = 2x + 2c \qquad \text{put } t = x + y$$

$$\Rightarrow x - y - \frac{1}{2}\sin 2\left(x+y\right) + c = 0 \, .$$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖